
Robuste Mehrgitter-Vorkonditionierung
für lineare Elastizität
mit dem Finiten Element
von Mardal, Tai und Winther

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der

Universität Hannover 

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Frank Samir Attia

geboren am 11. Juli 1974 in Hannover

Referent: Prof. Dr. Gerhard Starke
Korreferent: Prof. Dr. Axel Klawonn
Tag der Promotion: 26. Juni 2006

Danksagung

Neben der Lektüre mathematischer Literatur sind es vor allem Diskussionen, die dazu beigetragen haben, das Gelesene und meine Überlegungen aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten und mein mathematisches Wissen und meine Aufnahmefähigkeit zu erweitern, so dass schließlich diese Arbeit als ein Ergebnis meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am *Institut für Angewandte Mathematik* der *Universität Hannover* vorliegt.

Ich danke *Herrn Prof. Dr. Gerhard Starke* für die Überlassung des Themas, die engagierte Betreuung und die weiterführenden Diskussionen zum Thema dieser Arbeit und zu den von uns betreuten Vorlesungen.

Für hilfreiche Diskussionen möchte ich mich auch bei der übrigen *Arbeitsgruppe Wissenschaftliches Rechnen* des *Instituts für Angewandte Mathematik* der *Universität Hannover* bedanken. Insbesondere danke ich *Herrn Dr. Johannes Korsawe* für die Gespräche am Anfang meiner Promotionszeit und *Herrn Jörg Kubitz* sowie den zum *Institut für Mathematik* gehörenden Doktoranden *Herrn Cord Erdenberger* und *Frau Katharina Ludwig*, der auch Dank für den nächsten Punkt gebührt.

Für Diskussionen und Hilfestellungen bezüglich Rechtschreibung und Ausdruck danke ich insbesondere *Frau Frauke Stiegel* und *Frau Alexandra Rauch*.

Ich danke *Herrn Prof. Dr. Axel Klawonn* für die freundliche Übernahme des Korreferats.

Schließlich möchte ich an dieser Stelle meinen Eltern und meinen Freunden für die Unterstützung in den Bereichen außerhalb der Wissenschaft danken. Dabei möchte ich insbesondere *Herrn Dr. Martin Mutz* und *Herrn Mazeyar Makoui* erwähnen.

April 2006,

Frank Samir Attia.

Zusammenfassung

Diese Arbeit untersucht das Finite Element von Mardal, Tai und Winther im Hinblick auf seine Eignung als robustes Element für einen variationellen reinen Verschiebungs-Ansatz zur Lösung der partiellen Differentialgleichung der linearen, isotropen homogenen Elastizität. Da es sich um ein nichtkonformes Element handelt, werden zunächst die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit einer diskreten Näherungslösung geklärt; dazu wird für polygonal berandete, beschränkte Gebiete für verschiedene Kombinationen von Randbedingungen die diskrete Version der zweiten KORNSchen Ungleichung für diese Elemente bewiesen. Es wird eine Abschätzung des Diskretisierungsfehlers bewiesen, die dessen Energie-Norm mit einer vom Inkompressibilitätsparameter λ unabhängigen Konstante C durch Ch nach oben abschätzt, wobei der Diskretisierungsparameter h die Maschenweite des zugrundeliegenden Gitters bezeichnet.

Nachdem bewiesen ist, dass es sich um einen robusten Ansatz handelt, soll ein robustes Iterationsverfahren zur näherungsweise Berechnung der diskreten Näherungslösungen entwickelt werden. Genauer soll ein Mehrgitterverfahren konstruiert werden, das einen Vorkonditionierer bereitstellt, so dass das Spektrum der vorkonditionierten Systemmatrizen unabhängig vom Inkompressibilitätsparameter λ und der Maschenweite h des Gitters durch positive Konstanten beschränkt ist. Die Konstruktion eines Mehrgitter-Vorkonditionierers mit diesen Eigenschaften basiert zum einen auf der Entwicklung eines geeigneten Glätters; dazu werden bekannte Glätter untersucht. Zum anderen ist ein den obigen Anforderungen genügender Prolongationsoperator zu entwickeln. Es wird ein Zusammenhang zu den linearen Brezzi-Douglas-Marini-Räumen hergestellt, mit dessen Hilfe ein problemangepasster Prolongationsoperator angegeben wird.

Schlagwörter: Mehrgitter, Vorkonditionierung, lineare Elastizität, Finite Elemente

Abstract

This thesis analyses the finite element of Mardal, Tai and Winther in view of its ability to be a robust element for a pure displacement variational formulation for the partial differential equations of planar, linear, isotropic, homogeneous elasticity. Due to the nonconformity of the element, first, the questions concerning existence and uniqueness of a discrete approximative solution is treated; for this purpose, the discrete version of Korn's second inequality is proven for different combinations of boundary conditions and bounded polygonal domains. An estimation of the discretization error is proven: the energy norm of the discretization error is bounded by Ch , where the constant C is independent of the incompressibility parameter λ and h denotes the mesh width of the underlying triangulation.

Having shown the ansatz to be robust, a robust iterative solution method shall be developed to compute approximations for the discrete approximative solution. More precisely, a multigrid method shall be constructed, which provides a preconditioner, such that the spectrum of the preconditioned system matrices will be bounded independently of the incompressibility parameter λ and the mesh width h by positive constants. On the one hand the construction of such a multigrid preconditioner is based on the design of an appropriate smoother; therefore established smoothers will be considered. On the other hand a suitable prolongation operator has to be designed. A connection to the linear Brezzi-Douglas-Marini spaces will be established, whereby a prolongation operator adopted to the problem will be quoted.

Key words. multigrid, preconditioning, linear elasticity, finite element

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
0.1	Finite Elemente und Variationsformulierung	1
0.1.1	Parameterabhängige Probleme, Robustheit	2
0.1.2	Verschiedene Ansätze	2
0.1.3	Mehrgitterverfahren	5
0.2	Problemstellung	6
0.3	Überblick	7
1	Lineare Elastizität in der Ebene und Modellbildung	9
1.1	Grundlagen und Notation	9
1.2	Die Variationelle Displacement-Formulierung	11
1.2.1	Variationelle Displacement-Formulierung	11
1.2.2	Lösungen der variationellen Displacement-Formulierung	12
1.3	Diskretisierungen der Displacement-Formulierung	13
1.3.1	Konforme Diskretisierungen	13
1.3.2	Nichtkonforme Diskretisierungen	13
2	Der FE-Raum von Mardal, Tai & Winther	15
2.1	Der Finite-Element-Raum	15
2.1.1	Das MTW-Element	15
2.1.2	Der MTW-Raum \mathbf{V}_h	16
2.1.3	Elementweise Darstellung des MTW-Raumes	18
2.2	Schwache Formulierung und zugehörige Theorie	20
2.2.1	Schwache Formulierung im MTW-Raum	20
2.2.2	Diskrete Kornsche Ungleichung	21
2.2.3	Der Diskretisierungsfehler	26
2.3	Der Unterraum divergenzfreier Funktionen	28
2.3.1	Das modifizierte Morley Element	29
2.3.2	Der Raum W_h	29
2.3.3	Einige divergenzfreie Unterräume	30
2.3.4	Charakterisierung des divergenzfreien Unterraums	31
2.3.5	Ein Unterraum divergenzbehafteter Funktionen	33
2.4	Der Brezzi-Douglas-Marini-Raum BDM_1	33
2.4.1	Das BDM_1 Element	33
2.4.2	Der Raum $BDM_{1,h}$	34

3	Iterative Verfahren	35
3.1	Lineare Iterationsverfahren	36
3.1.1	Grundlagen und Bezeichnungen	36
3.1.2	Beispiele für Iterationsverfahren	40
3.1.3	Der Gauß-Seidel-Glätter für parameterabhängige Probleme	41
3.1.4	Dämpfungseigenschaft und Kombination iterativer Verfahren	43
3.2	Mehrgitterverfahren	45
3.2.1	Bezeichnungen des Mehrgitterverfahrens	46
3.2.2	Definition Mehrgitterverfahren	46
3.2.3	Einfache Eigenschaften.	47
3.3	Problemspezifische Glättung und Prolongation	49
3.3.1	Gewöhnliche Verfahren: Symmetrisches GS-Verfahren	49
3.3.2	Problemangepasste Glätter	51
3.3.3	Problemangepasste Prolongation	55
4	Beispiele und numerische Ergebnisse	59
4.1	Anwendungsbeispiele	59
4.1.1	Die Lochscheibe	59
4.1.2	Das Quadrat	59
4.2	Numerische Ergebnisse mit direktem Löser	60
4.2.1	Die Lochscheibe	61
4.2.2	Das Quadrat	61
4.3	Numerische Ergebnisse mit iterativen Verfahren	63
4.3.1	Glätter	64
4.3.2	Das pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer	64

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl der Iterationen, pcg mit sGS als Vorkonditionierer	50
3.2	Gerundete Eigenwerte μ_i der Systemmatrix mit sGS-Vorkonditionierer .	50
3.3	Gerundete Eigenwerte μ_i der Systemmatrix mit sGS^+ -Vorkonditionierer	52
3.4	Anzahl der Iterationen, pcg mit angepasstem Vorkonditionierer	52
3.5	Anzahl der Iterationen, pcg mit angepasstem Block-Vorkonditionierer .	54
3.6	Anzahl der Iterationen, angepasster Glätter	55
4.1	Diskretisierungsfehler in der Energienorm, Lochplatte	61
4.2	Approximation des Exponenten aus (4.2), Lochplatte	61
4.3	Diskretisierungsfehler in der Energienorm, Quadrat	62
4.4	Konvergenzraten in der Energienorm, Quadrat	62
4.5	Konvergenzraten in der Energienorm	63
4.6	pcg-Verfahren mit 1-Level-Vorkonditionierer, Lochscheibe	64
4.7	pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante des Quadrats .	66
4.8	pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante des Quadrats .	66
4.9	pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer auf dem Quadrat	66
4.10	pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer auf dem Quadrat	67
4.11	pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer, Lochscheibe	67
4.12	pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Lochscheibe	67
4.13	pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante der Lochscheibe	68
4.14	Poisson-Zahl ν und Elastizitätsmodul E	68

Abbildungsverzeichnis

1.1	Referenzkonfigurationen	10
2.1	Das MTW-Element	16
2.2	Dreieck T	18
2.3	Schlechte Triangulierung am gekurvten Rand der Lochscheibe.	25
2.4	Das modifizierte Morley Element	29
2.5	Divergenzfreie Basisfunktionen	30
2.6	Divergenzbehaftete Funktion und das BDM -Element	33
3.1	Dünn besetzte Systemmatrix	36
3.2	Einfache Triangulierung des Quadrats	50
3.3	Mehrgitterverfahren mit AM-Prolongation	56
3.4	Mehrgitterverfahren mit BDM -Prolongation	58
4.1	Trapezförmiges Pendant zum Quadrat	62
4.2	Triangulierung des Quadrats nach <i>einer</i> Verfeinerung	65

Kapitel 0

Einleitung

0.1 Finite Elemente und Variationsformulierung

Zur Beschreibung von Phänomenen aus Natur und Technik werden entsprechende mathematische Modelle entwickelt, die fast immer ein System von (Un-)Gleichungen beinhalten, das zur Simulation und Voraussage von Ereignissen gelöst werden muss. Diese Systeme bestehen häufig aus partiellen Differentialgleichungen.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Phänomen der elastischen Verformung von isotropen Materialien: Das Material wird einer Kraft ausgesetzt und nimmt eine bestimmte neue Form an. Fasst man das Material als eine Menge von Punkten auf, so soll etwa vorausgesagt werden, wohin jeder Punkt verschoben wird; ihre *Verschiebung* ist gesucht. Neben ihr könnten andere Größen von Interesse sein, wie die *Verzerrung* oder *Spannungen* im Material. Das in diesem Fall zur Anwendung kommende physikalische Gleichgewichtsgesetz ist eine elliptische partielle Differentialgleichung (s. Kapitel 1).

Für partielle Differentialgleichungen kann meist keine explizite Lösung angegeben werden, sie sind aber häufig in einer schwächeren Form als so genannte Variationsprobleme mit einer Bilinearform darstellbar. Die Lösungen der Variationsprobleme sind i. d. R. verhältnismäßig gut numerisch approximierbar. Die *Finiten Elemente* sind dabei die am häufigsten angewandten Hilfsmittel zur numerischen Behandlung solcher Probleme – mit modernen Rechnern können sehr genaue Approximationen der Lösungen berechnet werden. Wegen der steigenden Anzahl von zu berechnenden Variablen zum Erhalt einer besseren Approximationsgüte ist es wünschenswert, dass die Berechnungszeit des Lösungsalgorithmus asymptotisch nur linear in der Anzahl der Unbekannten wächst. Dies erreicht man durch Verwendung von Mehrgitterverfahren, die in Anlehnung an die angelsächsische Literatur auch häufig „Multigrid-Methoden“ genannt werden.

Unter der zahlreichen Literatur zum Thema Finite Elemente und Mehrgitterverfahren sind die Bücher von BRAESS [Bra03] und BRENNER/SCOTT [BS02] zwei neuere mit einer Einführung in das Thema. Das Lehrbuch [Hac85] von HACKBUSCH ist ein Standardwerk zur Einführung in Mehrgitterverfahren und Konvergenzanalyse. Die neuere Quelle [Bra93] bzw. deren Erweiterung [BZ00] von BRAMBLE/ZHANG liefert eine recht umfangreiche und abstrakte Behandlung des Themas Konvergenzanalyse von Mehrgitterverfahren. Dort werden in Form von nachzuweisenden Ungleichungen Bedin-

gungen an die in den Mehrgitterverfahren verwendeten Glättungsoperatoren und die zur Informationsübertragung zwischen den Gittern verwendeten Prolongations- und Restriktionsoperatoren gestellt, die die Konvergenz der Mehrgitterverfahren sichern; diese Bedingungen sind aber i. Allg. schwer für die speziellen Operatoren nachzuweisen.

0.1.1 Parameterabhängige Probleme, Robustheit

Oft ist das Variationsproblem von gewissen Größen, z. B. Materialparametern μ, λ, \dots , abhängig. Man erhält eine zu erfüllende Variationsgleichung vom Typ

$$(1) \quad \forall v \in V : \quad a_\lambda(u, v) := \tilde{a}(u, v) + \lambda \tilde{c}(\Lambda u, \Lambda v) = (f, v) \quad ,$$

wobei \tilde{a}, \tilde{c} stetige symmetrische nicht-negative Bilinearformen auf Hilberträumen V, Q sind, und $\Lambda : V \rightarrow Q$ ein stetiger Operator ist, dessen Kern V_0 nicht nur die Null enthält. Für die in dieser Arbeit betrachteten Gleichungen der linearen isotropen Elastizität wird (1) mit Materialparametern μ, λ zu

$$(2) \quad \forall v \in V : \quad a_\lambda(u, v) := 2\mu(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0 + \lambda(\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_0 = (f, v)_0 \quad ,$$

wenn man von den physikalischen Größen nur die so genannte Verschiebung u in der Variationsformulierung bestimmen will. Dann ist also $\tilde{a}(u, v) = 2\mu(\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0$, weiter $\tilde{c}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u}, \tilde{v})_0$ und $\Lambda = \operatorname{div}$ mit an dieser Stelle nicht weiter bezeichneten Ausdrücken (man siehe auch [Bra03, Kap. VI, §3]). Wenn man – was für alle weiteren Untersuchungen wichtig ist – zeigen kann, dass a_λ V -elliptisch ist (dazu beweist man KORNsche Ungleichungen), dann ist natürlich a_λ für $\lambda \geq 1$ gleichmäßig in λ V -elliptisch; die Konstante der Stetigkeitsabschätzung hängt jedoch i. Allg. von λ ab. Dies führt meist dazu, dass der Fehler $\|u - u_h\|$ entsprechender Ansätze häufig nur eine Gleichung der Form

$$(3) \quad \|u - u_h\| \leq C_\lambda N^{-\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}_{>0})$$

mit Konstanten C_λ erfüllt, die mit wachsendem λ beliebig groß werden, so dass für „großes“ λ praktisch keine Aussage mehr vorhanden ist ($N = N(h)$ bezeichnet die Anzahl der Unbekannten).

Man ist in diesem Zusammenhang an *robusten* Ansätzen interessiert, bei denen die Konstanten C_λ für beliebig große λ durch eine positive Konstante C beschränkt bleiben. Darauf basierend sollen dann *robuste* Lösungsmethoden entwickelt werden.

0.1.2 Verschiedene Ansätze

Für die Herangehensweise mit Finiten Elementen sind zur Gewinnung der Variationsformulierungen verschiedene Ansätze gebräuchlich. Die verschiedenen Variationsformulierungen unterscheiden sich durch die zu bestimmenden Größen des Problems; so könnten neben der Verschiebung auch die Größen Spannung oder Verzerrung von Interesse sein. Ebenso kann die zusätzliche Verwendung solcher Größen dazu beitragen, robuste Ansätze zu erhalten.

Reiner Verschiebungs-Ansatz

Wenn nur u gesucht ist, bietet es sich an, den Ansatz (1) direkt zu verwenden. Dieser sei im Hinblick auf die beim Beispiel der Elastizität zu bestimmende Verschiebung u mit *reiner Verschiebungs-Ansatz* und die Formulierung auch mit *reine Displacement-Formulierung* bezeichnet. Wenn man FE-Ansatzräume mit stückweisen Polynomen niedrigen Grades wählt, kann dieser Ansatz zu einem geringeren Aufwand bei der Berechnung von Näherungslösungen führen, da keine weiteren Variablen eingeführt werden. Deswegen soll der reine Verschiebungs-Ansatz in dieser Arbeit untersucht werden. Ob dieser Ansatz robust ist, hängt aber ebenfalls von der Wahl des Finiten Elements ab. Es ist z. B. bekannt, dass keine *konformen* Finiten Elemente, also keine mit *stetigen* stückweisen Polynomen vom Grad kleiner vier verwendet werden können, um einen robusten reinen Verschiebungs-Ansatz für das Elastizitätsproblem zu erhalten. Die Wahl eines *nichtkonformen* Elements bringt einige Schwierigkeiten mit sich (s. Problemstellung, Abschnitt 0.2).

Gemischte Probleme, Sattelpunktprobleme

Man reformuliert den Ansatz (1) häufig als Sattelpunktproblem (bzw. als gemischtes Problem) in geeigneten Räumen X, M : man sucht dann etwa $(\sigma, u) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} \forall \tau \in X : \quad \bar{a}(\sigma, \tau) + \bar{b}(\tau, u) &= (\bar{f}, \tau) \\ \forall v \in M : \quad \bar{b}(\sigma, v) &= (\bar{g}, v) \quad . \end{aligned}$$

Für das Beispiel der linearen Elastizität siehe man z. B. [Bra03, Kap. VI, §3] für die *gemischte Methode nach Hellinger und Reissner*, mit der Verschiebung und Spannung bestimmt werden, oder auch für die *gemischte Methode von Hu-Washizu*, mit der zusätzlich noch die Verzerrung in der Formulierung enthalten bleibt.

Für diese Ansätze ist zu erwähnen, dass unter anderem die verwendeten Räume X, M (bzw. die entsprechenden diskreten Teilräume) nicht in beliebig freier Kombination gewählt werden dürfen; vielmehr ist eine Bedingung, die inf-sup-Bedingung (auch Brezzi-, Babuschka-Brezzi oder LBB-Bedingung genannt) zu erfüllen ([Bra03],[BS02]).

Um robuste Ansätze zu erhalten, wird z. B. ein zusätzlicher Strafterm eingefügt (s. [Bra03, Kap. III, §4]).

Gemischte Probleme, „Reduced Integration“

Eine weitere Möglichkeit Ansatz (1) zu reformulieren ist das Einführen einer dualen Variable $p = \lambda \Lambda u$ (s. [BF91, Kap. VI.7],[Sch99]); man erhält ein gemischtes Problem der Form

$$\begin{aligned} \forall v \in V : \quad \tilde{a}(u, v) + b(v, p) &= (f, v) \\ \forall q \in Q : \quad b(u, q) - \lambda^{-1}(p, q) &= 0 \end{aligned}$$

mit $b(v, q) := \tilde{c}(\Lambda v, q)$ in Räumen V, Q . Im linear elastischen Beispiel ist dies also

$$\begin{aligned} \forall v \in V : \quad 2\mu (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_0 + (\operatorname{div} v, p)_0 &= (f, v)_0 \\ \forall q \in Q : \quad (\operatorname{div} u, q)_0 - \lambda^{-1}(p, q)_0 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

d. h. $b(v, q) = (\operatorname{div} v, q)$ und $\tilde{a}, \tilde{c}, \dots$ wie oben. Dieses gemischte Problem kann man als Variationsproblem auf dem Produktraum $V \times Q$ mit einer Bilinearform \mathcal{B}_λ auffassen. Für *konforme* Teilräume V_h, Q_h wird eine diskrete Bilinearform $\mathcal{B}_{\lambda,h}$ eingeführt. Diese ist nicht nur die Einschränkung von \mathcal{B}_λ auf die Teilräume, sondern beinhaltet eine „Aufweichung“ (eine Modifikation/ein Ersetzen) des Operators Λ durch geeignete Operatoren Λ_h .

Unter gewissen Voraussetzungen, die unter anderem durch die gewählten diskreten Räume erfüllt werden, ist dieser Ansatz robust.

Es gilt sogar weiter, dass man die duale Variable häufig wieder eliminieren kann und man den robusten Ansatz

$$(4) \quad \forall v_h \in V_h \subset V : \quad \tilde{a}(u_h, v_h) + \lambda \tilde{c}(\Lambda_h u_h, \Lambda_h v_h) = f(v_h)$$

für die Verschiebungen erhält, der ebenfalls zu robusten Methoden führt.

Es sei hier bemerkt, dass diese Diskretisierungen i. Allg. zu den *nichtkonformen* gehören; zwar wird an der Voraussetzung $V_h \subset V$ für die diskreten Räume festgehalten, aber durch die Aufweichung¹ gilt *nicht*

$$a_\lambda(u_h, v_h) = \tilde{a}(u_h, v_h) + \lambda c(\Lambda_h u_h, \Lambda_h v_h) \quad ,$$

da i. Allg. $\Lambda|_{V_h} \neq \Lambda_h$ ist, obwohl auf $V_h \times Q_h$ $\mathcal{B}_\lambda = \mathcal{B}_{\lambda,h}$ gilt. Selbstverständlich gilt die Gleichung für konforme Teilräume $V_h \subset V$, die auf jedem Element der Identität $\Lambda = \Lambda_h$ genügen (im Elastizitätsbeispiel: konstante Divergenz besitzen), etwa komponentenweise lineare Elemente. Diese Wahl der Räume (P_1 – P_0) führt aber an anderer Stelle zu Problemen und ist leider nicht praktikabel.

Den Unterabschnitt abschließend sei dies nochmal plakativ dargestellt: Man erhält hier robuste FE-Ansätze, indem man zwar die Ansatzräume *konform* wählt, aber die Bilinearform modifiziert (\leadsto *nichtkonforme* Methode, im Gegensatz zu „gewöhnlichen“ nichtkonformen Methoden, bei denen die FE-Ansatzräume $V_h \not\subset V$ keine Teilräume sind, aber die diskreten, gitterabhängigen, auf $V + V_h$ definierten Bilinearformen $a_{\lambda,h}$ für beliebige $u, v \in V$ mit a_λ übereinstimmen).

Least-Squares-Verfahren

Seien U, V zwei Vektorräume, $b \in U$ und $A : V \rightarrow U$ eine (lineare) Abbildung. Least-Squares-Verfahren basieren darauf, dass ein Element $x \in V$ die Gleichung $Ax = b$ genau dann löst, wenn die U -Vektorraumnorm $\|Ax - b\|_U$ (äquivalent: deren Quadrat $\mathcal{F}(x) := \|Ax - b\|_U^2$) Null wird. Man versucht \mathcal{F} in Teilräumen $V_h \subset V$ wachsender Dimension zu minimieren². Für das Beispiel der linearen Elastizität lautet die partielle Differentialgleichung, aus der die Variationsprobleme resultieren (vgl. Kapitel 1):

$$(5) \quad -\operatorname{div} \sigma(u) = \tilde{f} \quad .$$

¹Für das Elastizitätsbeispiel wird $\Lambda_h u_h$ bei [Sch99] auf den Gebieten der einzelnen Elemente über die dortige Mittelung von $\operatorname{div} u_h$ definiert.

²Es kann der Spezialfall $U = V$ vorliegen, und es können Verallgemeinerungen gelten: b könnte durch Näherungen \tilde{b}_k ersetzt werden, statt U könnten Räume U_l verwendet werden, die Norm könnte durch äquivalente Normen ersetzt werden, ...

Dies ist äquivalent zu

$$(6) \quad \|\tilde{f} - \mathbf{div} \mathcal{C}\varepsilon(u)\|_0^2 = 0 \quad ,$$

so dass man versuchen könnte, die durch $\tilde{\mathcal{F}}(u) := \|\tilde{f} - \mathcal{C}\varepsilon(u)\|_0^2$ definierte Größe zu minimieren. Die Gleichung (5) ist aber auch zum System

$$(7) \quad -\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = \tilde{f}$$

$$(8) \quad \boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C}\varepsilon(u) = 0$$

äquivalent, und man würde also etwa

$$(9) \quad \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}, u) := \|\tilde{f} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}\|_0^2 + \|\mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{C}\varepsilon(u))\|_0^2$$

minimieren; dabei ist \mathcal{G} eine (lineare) Abbildung mit trivialem Kern (etwa die Identität, oder $\mathcal{G} = \mathcal{C}^{-1}$, in der Praxis wird aber oft $\mathcal{G} = \mathcal{C}^{-\frac{1}{2}}$ über die positiv definite Abbildung \mathcal{C} definiert, da dann den Ausdrücken in einer assoziierten Norm die Bedeutung von Energien zukommt).

Im ersten Fall ist $\mathbf{div} \mathcal{C}\varepsilon$ ein Differentialoperator 2. Ordnung, im zweiten Fall ist sowohl \mathbf{div} als auch $\mathcal{C}\varepsilon$ ein Operator 1. Ordnung.

Das partielle Differentialgleichungssystem sollte 1. Ordnung besitzen – andernfalls müssten H^2 -konforme finite Elemente verwendet werden. Auch im nichtkonformen Fall können keine stückweisen Polynome niedrigen Grades (trivialerweise z. B. keine stückweise linearen Polynome) verwendet werden. Für die zweite Variante siehe etwa [CS04], [CKS05], oder [AS05].

Die Wahl der Ansatzräume ist im Gegensatz zu den gemischten Methoden (s.o.) in der Hinsicht beliebig, dass keine inf-sup-Bedingung zu erfüllen ist.

Außerdem erhält man immer symmetrisch positiv semidefinite Systeme, die bei entsprechender Wohlgestelltheit (Gültigkeit von Kornschen Ungleichungen) sogar definit sind.

Weiter liefert das Least-Squares-Funktional \mathcal{F} häufig einen a-posteriori Fehlerschätzer, mit dessen Hilfe man die diskreten Ansatzräume *gezielt* vergrößern kann.

Durch die Wahl nichtkonformer Räume $V_h \not\subset V$ (oder konformer mit stückweisen Polynomen hohen Grades) kann man robuste Ansätze mit den beschriebenen Vorteilen von Least-Squares-Verfahren erhalten. Die zugehörige Konvergenztheorie basiert auf der Äquivalenz der Minimierung von \mathcal{F} (bzw. der diskreten Analoga \mathcal{F}_h) und entsprechender Variationsprobleme. In dieser braucht man zusätzlich den Konsistenzfehler nicht abzuschätzen (im Ggs. zum in dieser Arbeit gewählten reinen Verschiebungs-Ansatz, vgl. Kapitel 2, Abschnitt 2.2.3), da dieser bei Least-Squares-Ansätzen verschwindet (s. [CKS05]).

0.1.3 Mehrgitterverfahren

Hat man nun durch entsprechende Wahl der Kombination aus Formulierung und Finiten Elementen einen robusten Ansatz erhalten, verbleibt das Problem des Lösens der diskreten Gleichungssysteme. Durch die Verwendung von Basen der FE-Räume V_h erhält man jeweils ein System der Form

$$(10) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{f}_h$$

für den Koordinatenvektor \mathbf{u}_h . Das exakte Lösen der Systeme verspricht jetzt „gute“ Lösungen \mathbf{u}_h (bei denen von λ unabhängig der relative Fehler „mit h^α “ gegen 0 strebt). Exaktes Lösen ist aber i. d. R. nicht möglich, und selbst „direktes“ Lösen (Gauß-Verfahren, LR- bzw. Cholesky-Zerlegung) ist bei großer Anzahl von Unbekannten zu aufwendig. Außerdem ist die diskrete Lösung i. Allg. selber nur der Koordinatenvektor einer *Näherungslösung* \mathbf{u}_h für die gesuchte Lösung u , so dass es wenig Sinn hat, \mathbf{u}_h (bzw. u_h) exakt zu bestimmen. Geht man davon aus, dass die Lösung u_h mit dem Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|$ behaftet ist, wird man vielmehr versuchen, eine Näherungslösung $u_h^{(k)}$ zu bestimmen, so dass der Fehler $\|u_h - u_h^{(k)}\|$ etwa in der gleichen Größenordnung liegt. Wie bereits am Anfang dieses Kapitels erwähnt, ist man deshalb an Methoden interessiert, die die resultierenden diskreten Gleichungssysteme effizient lösen. Weiter ist aber bekannt, dass die Konditionszahl des Systems gewöhnlich sowohl in Abhängigkeit von der Anzahl der Unbekannten als auch vom Parameter λ gegen ∞ strebt³. Deswegen können auch „gewöhnliche“ iterative Verfahren schlecht verwendet werden. Die speziellen Strukturen der Matrizen solcher Ansätze bieten die Möglichkeit für problemspezifische iterative Lösungsverfahren.

Anders formuliert ist man an Vorkonditionierern \mathbf{N}_h interessiert, die dazu führen, dass die Systemmatrix $\mathbf{N}_h \mathbf{A}_h$ des äquivalenten Systems

$$(11) \quad \mathbf{N}_h \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{N}_h \mathbf{f}_h$$

unabhängig von h und λ gut konditioniert ist. Es ist zu bemerken, dass die als Sattelpunktproblem formulierten gemischten Ansätze zu indefiniten Systemmatrizen führen; für effiziente Präkonditionierung siehe man etwa [KS04]. Weiter ist zu bemerken, dass der reine Verschiebungs-Ansatz bei der Gültigkeit von diskreten KORNschen Ungleichungen zu symmetrisch positiv definiten Systemmatrizen führt. Bekanntermaßen können problemspezifisch konstruierte Mehrgitterverfahren *MG* eine Möglichkeit für das effiziente Lösen (bzw. Vorkonditionieren) bieten. Man erhält ein iteratives Verfahren

1. $k = 0$, $\mathbf{u}^{(0)} = 0$,
2. $\mathbf{u}^{(k)} \mapsto MG(\mathbf{A}_h, \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{f}_h) = \mathbf{M}_h \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{N}_h \mathbf{f}_h =: \mathbf{u}^{(k+1)}$,
3. $k = k + 1$ goto (2),

dessen Anwendung eine Folge von Näherungen $\mathbf{u}^{(k)}$ liefert, die unabhängig von h und λ gegen \mathbf{u}_h konvergiert. Weiter stellt das Verfahren mit $\mathbf{N}_h \mathbf{c} = MG(\mathbf{A}_h, 0, \mathbf{c})$ die Matrix-Vektormultiplikation von Vorkonditionierer \mathbf{N}_h und beliebigem Vektor \mathbf{c} passender Dimension zur Verfügung.

0.2 Problemstellung

Mardal, Tai und Winther haben in [MTW02] ein robustes Finites Element, das von nun an „MTW-Element“ genannt wird, für ein „makroskopisches Fließmodell eines ‘fast

³Die Konditionszahl hängt von der gewählten Basis ab; es gibt Konzepte, die versuchen, die Abhängigkeit von der Zahl der Unbekannten durch Konstruktion von *hierarchischen Basen* zu beseitigen.

porösen' Mediums“ vorgeschlagen, dessen Bilinearform der Variationsformulierung nahelegt, dass dieses Element ebenfalls für die reine Displacement-Variationsformulierung eines Elastizitätsproblems in der Ebene robust ist.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass das MTW-Element für die reine Displacement-Variationsformulierung des Elastizitätsproblems als robustes Element verwendbar ist, und ein effizienter Mehrgitter-Vorkonditionierer zu dessen Lösung soll entwickelt werden.

Dabei treten verschiedene Probleme auf. Selbst wenn man davon ausgeht, dass es eine eindeutige Lösung u gibt⁴, ist für nichtkonforme Diskretisierungen im Allgemeinen unklar, ob

- (a) das diskrete Problem überhaupt immer eine Lösung u_h besitzt,
- (b) diese, wenn sie existiert, eindeutig ist,
- (c) wie man dann den Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|$ misst, bzw.
- (d) ob/wie in diesem Fall der Fehler $\|u - u_h\|$ mit wachsender Zahl der Unbekannten gegen Null strebt.

Außerdem besteht das Problem, die problemangepassten iterativen Verfahren zu entwickeln; für die Entwicklung der vielversprechenden Mehrgitter-Vorkonditionierer heißt das insbesondere, dass man

- (e) für die einzelnen Gitter iterative Verfahren (*Glätter*) und
- (f) für den Informationsaustausch zwischen den Gittern *Operatoren*

finden muss, so dass der Mehrgitter-Vorkonditionierer unabhängig von der Anzahl der Unbekannten und dem Inkompressibilitätsparameter λ Näherungen \tilde{u}_h einer gewissen Güte für u_h bereitstellt und zusätzlich der Aufwand für die Berechnung von \tilde{u}_h asymptotisch linear von der Anzahl der Unbekannten abhängt.

0.3 Überblick

Kapitel 1 gibt eine kurze Einführung in die linearisierte, isotrope, planare Elastizitätstheorie. Dort wird weiter die variationelle Displacement-Formulierung eingeführt und Betrachtungen bzgl. Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und konformen und nichtkonformen Diskretisierungen werden getätigt.

In Kapitel 2 werden die benötigten FE-Räume eingeführt und untersucht, insbesondere der MTW-Raum zum nichtkonformen Element von Mardal, Tai und Winther. Das Kapitel behandelt außerdem die Punkte (a)–(d) des vorigen Abschnitts.

Im dritten Kapitel wird das Mehrgitterverfahren als spezielles lineares Iterationsverfahren eingeführt. Zunächst werden die linearen Iterationsverfahren definiert und für den späteren Verlauf werden wichtige Grundlagen gewonnen. Nachdem dann die Mehrgitterverfahren definiert und einige Bedingungen zur Konvergenz (bzw. zur Eignung als

⁴Diese sollte zunächst in gewissen Normen $\|\cdot\|_{N_i}$ „stetig“ $\|u\|_{N_1} \leq c\|f\|_{N_2}$ von dem Eingabedatum f abhängen (mit einer von u, f unabhängigen Konstante c).

Vorkonditionierer) angegeben sind, werden für die Verfahren problemangepasste Glätter und Prolongations- sowie Restriktionsoperatoren entwickelt (Punkte (e) und (f) des vorigen Abschnitts).

Das letzte Kapitel präsentiert und diskutiert die numerischen Ergebnisse.

Kapitel 1

Lineare Elastizität in der Ebene und Modellbildung

1.1 Grundlagen und Notation

Untersucht werden soll ein als Kontinuum aufgefasstes homogenes isotropes elastisches Material. Unter gewissen Krafteinwirkungen wird ein solches deformiert. Dies soll zunächst mathematisch beschrieben werden, wobei [LL65] und [BS02] gefolgt wird.

Das Material bestehe aus der Punktmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, wobei zunächst vorausgesetzt sei, dass Ω ein beschränktes Gebiet sei (die sog. *Referenzkonfiguration*). Es sei $x \in \Omega$ der Ortsvektor eines Punktes der Referenzkonfiguration, der (unter Krafteinwirkung) in der deformierten Konfiguration (einer Punktmenge $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$) den Ortsvektor \tilde{x} besitze. Dann definiert man den *Verschiebungsvektor* u als Differenz $u := \tilde{x} - x$, die durch zunehmenden Einfluss der angelsächsischen Sprachen auch als „Displacement“ bezeichnet wird. Gesucht wird nun das Displacement u als Funktion von $x \in \Omega$ (denn dadurch wird die Deformation vollständig bestimmt). Dieses Displacement u genügt in einer linearisierten Elastizitätstheorie im Gebiet Ω der Gleichgewichtsbedingung

$$(1.1) \quad -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(u) = \tilde{f} \quad ,$$

wobei der *Spannungstensor* (auch „die *Spannung*“) $\boldsymbol{\sigma}$ über den *linearisierten Verzerrungstensor* (auch „die *Verzerrung*“)

$$(1.2) \quad \boldsymbol{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{grad} u + (\mathbf{grad} u)^T \right)$$

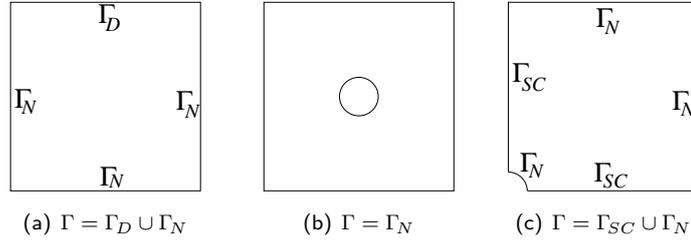
als

$$(1.3) \quad \boldsymbol{\sigma}(u) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(u) + \lambda \operatorname{div} u \boldsymbol{\delta} \quad (\text{Hookesches Gesetz})$$

definiert ist. Dabei sind die positiven Konstanten μ und λ die sog. Lamé-Parameter, und \tilde{f} repräsentiert auf den Gesamtkörper wirkende Kräfte (wie das Schwerfeld der Erde). Ein großer Quotient λ/μ modelliert nahezu inkompressible Materialien. Schließlich sei noch erwähnt, dass \mathbf{grad} und \mathbf{div} zeilenweise anzuwenden sind, und dass $\boldsymbol{\delta}$ hier die Einheitsmatrix bezeichnet. Die obige Linearisierung

$$\boldsymbol{\varepsilon}(u) = \frac{1}{2} \left(\nabla u + (\nabla u)^T \right)$$

Abbildung 1.1: Referenzkonfigurationen



der Verzerrung ε , die sonst durch

$$\frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u (\nabla u)^T)$$

definiert ist, wird bei kleinen Deformationen oder bei *St. Venant-Kirchhoff-Materialien* benutzt. Das sind Materialien, in denen die Linearisierung nicht nur für kleine Deformationen gilt (s. [Bra03, Kap. VI.]).

Zur Beschreibung von Unbeweglichkeiten des Materials an Randstücken und Kräfteinwirkungen an Randstücken, die jeweils die Deformation beeinflussen, seien Γ_D und Γ_N zwei offene Teilmengen des Gebietsrandes $\partial\Omega$, so dass $\partial\Omega = \Gamma = \overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}$ mit $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ gilt. Auf Γ_D gelte für die Verschiebung u die Randbedingung

$$(1.4) \quad u|_{\Gamma_D} = d \quad ,$$

was für $d = 0$ eine Unbeweglichkeit des Materials am Teilrand Γ_D beschreibt. Für die Beschreibung der Einwirkung von Zugkräften auf den Rand Γ_N gelte

$$(1.5) \quad (\sigma(u) \mathbf{n})|_{\Gamma_N} = t \quad ,$$

wobei \mathbf{n} der äußere Normaleneinheitsvektor an Γ_N sei.

Die Abbildung 1.1 zeigt drei Beispiele für Gebiete und Randbedingungen. Beim linken Beispiel stelle man sich vor, dass eine quadratische Membran „oben“ fest eingespannt ist ($d = 0$ auf Γ_D), und die weiter „unten“ einer konstanten Last ausgesetzt ist (d. h. $t = (0, \text{const.})^T$); am linken und rechten Rand sei die Membran „frei“ ($t = 0$).

Das mittlere Beispiel stellt eine quadratische, in der Mitte gelochte Scheibe dar. Man stelle sich vor, dass sie „oben“ einer zu „unten“ entgegengesetzten Last ausgesetzt ist (so dass die zu erwartende Verformung die Symmetrie des Gebietes erhält). Wegen der Symmetrie reicht es aus, ein Viertel der Lochscheibe zu betrachten. Dies reduziert den Aufwand für die spätere Berechnung von Näherungslösungen u_h , weiter vermeidet man Probleme mit der Eindeutigkeit einer Lösung (s. auch Abschnitt 1.2.2). Außerdem umgeht man so Probleme, die bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten auftreten.

Das rechte Beispiel stelle man sich als oberes, rechtes Viertel des mittleren vor. Dabei ist auf Γ_{SC} ein weiterer Randbedingungstyp einzuführen, der die Symmetriebedingungen berücksichtigt. Es reicht aber aus, die Theorie für die Lochscheibe zu entwickeln, da daraus die Ergebnisse für das Viertel jeweils wegen der Symmetrie folgen.

1.2 Die Variationelle Displacement-Formulierung

Es gibt verschiedene Ansätze für Variationsformulierungen, in denen das zu ermittelnde Displacement die Gleichgewichtsbedingung in einem *schwächeren* Sinn erfüllt, oder die neben dem Displacement u noch zusätzliche Größen, wie etwa die Spannung σ , ermitteln (s. Einleitung, gemischte Ansätze). Hier soll eine reine Displacement-Formulierung gegeben werden, die gegenüber gemischten Formulierungen bei der Diskretisierung den Vorteil hat, dass bei vergleichbarem Aufwand die Verschiebung genauer bestimmt werden kann. Interessiert man sich jedoch (auch) für die Spannungen, dann ist ein gemischter Ansatz vorzuziehen. Will man die Spannung $\sigma(u_h)$ näherungsweise aus einer diskreten Approximation u_h einer Lösung u eines reinen Displacement-Ansatzes bestimmen, so muss zunächst überlegt werden, wie $\sigma(u_h)$ zu verstehen ist. Es ist auch bekannt, dass dieser Weg meist zu schlechteren Approximationen führt.

1.2.1 Variationelle Displacement-Formulierung

Sei jetzt $u \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ und genüge der Gleichgewichtsbedingung (1.1). Sei weiter $v \in \mathbf{V} = \mathbf{V}(\Gamma_D)$ mit

$$(1.6) \quad \mathbf{V} := \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0 \right\} .$$

Es sei vorausgesetzt, dass $\tilde{f} \in L_2(\Omega)^2$ ist und man definiere $F(v) = \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot v \, d\Omega$. Dann folgt aus (1.1) durch Multiplikation mit v und partieller Integration

$$(1.7) \quad a(u, v) = F(v) + \int_{\Gamma_N} t \cdot v \, ds ,$$

wobei $a(u, v)$ definiert ist durch

$$(1.8) \quad a(u, v) := \int_{\Omega} (2\mu \varepsilon(u) : \varepsilon(v) + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} v) \, d\Omega .$$

Dabei ist für zwei Matrizen ε, σ das Produkt $\varepsilon : \sigma$ definiert durch $\varepsilon : \sigma := \operatorname{spur}(\varepsilon \sigma^T)$. Man erhält also die folgende schwache Formulierung:

$$(1.9) \quad \text{Finde } u \in \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ mit } u|_{\Gamma_D} = d \text{ und (1.7) für alle } v \in \mathbf{V} .$$

Ist u_d eine beliebige \mathbf{H}^1 -Funktion, die auf Γ_D die Randbedingung erfüllt, dann erhält man mit $F(v) := \int_{\Omega} \tilde{f} \cdot v \, d\Omega - a(u_d, v) =: \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$ die äquivalente¹ Formulierung

$$(1.10) \quad \text{Finde } u \in \mathbf{V} \text{ mit (1.7) für alle } v \in \mathbf{V} .$$

Bemerkung (Lochscheibenviertel)

Für das Lochscheibenviertel definiert man

$$(1.11) \quad \mathbf{V} := \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : v|_{\Gamma_{SC}} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\}$$

und erhält mit $F(v) := 0$ wieder die Formulierung (1.10).

¹Eine Funktion u_0 ist Lösung von (1.10) genau dann, wenn $u_0 + u_d$ Lösung von (1.9) ist.

1.2.2 Lösungen der variationellen Displacement-Formulierung

In dieser Arbeit sei bis auf einige Ausnahmen vorausgesetzt, dass das Maß von Γ_D positiv ist, so dass es sich also nicht um ein reines Zugproblem handelt². Denn für ein reines Zugproblem ist klar, dass eine Lösung u ohne weitere Einschränkungen nicht eindeutig bestimmt ist, da für die so genannten Starrkörperbewegungen (auch „Rigid (Body) Motions“)

$$(1.12) \quad \mathbf{RM} := \{v : v(x_1, x_2) = (a + bx_2, c - bx_1)^T, a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

gilt, dass $\varepsilon(\mathbf{RM}) = \{0\}$ ist³.

Kein reines Zugproblem

Es sei das Maß von Γ_D *positiv*. Es wird die Verschiebung aus der Ruhelage ($\tilde{f} = 0$) betrachtet, und es sei o.B.d.A $d = 0$ (s. o.), das heißt $F(v) := \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$.

Wegen der zweiten Kornschen Ungleichung (s. [BS02], S. 285),

$$(1.13) \quad \|\varepsilon(v)\|_0 \gtrsim \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall v \in \mathbf{V},$$

folgt sofort (mit dem Rieszischen Darstellungssatz oder dem Theorem von Lax-Milgram) die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u der schwachen Formulierung (1.9). Analog folgt, dass die schwache Formulierung in allen endlichdimensionalen Unterräumen von \mathbf{V} genau eine Lösung besitzt⁴. Somit ist eine theoretische Grundlage für konforme Diskretisierungen der Displacement-Formulierung geschaffen.

Reines Zugproblem

Es sei das Maß von Γ_D *gleich Null*. Für ein reines Zugproblem –wie die Lochscheibe– erhält man mit der zweiten Kornschen Ungleichung (s. [BS02], S. 284),

$$(1.14) \quad \|\varepsilon(v)\|_0 \gtrsim \|v\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \forall v \in \widehat{\mathbf{V}},$$

die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.7) im Raum

$$(1.15) \quad \widehat{\mathbf{V}} := \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, dx = 0, \int_{\Omega} \operatorname{rot} v = 0 \right\} .$$

Für Diskretisierungen reiner Zugprobleme siehe man auch [BS02] und [Fal91].

Lochscheibenviertel

Unter Verwendung der Transformationsformel und Ausnutzung von Linearitäten lässt sich die zweite Kornsche Ungleichung auf den zum Lochscheibenviertel gehörenden Raum \mathbf{V} übertragen. (Man siehe für den diskreten Fall auch den Beweis der Kornschen Ungleichung; die analoge Vorgehensweise soll nicht hierher übertragen werden.) Es folgt Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für das Lochscheibenviertel.

²Für ein solches siehe man z. B. [BS02] und [Fal91].

³Man kann zeigen, dass *genau* diese Funktionen den Kern von ε bilden.

⁴Meistens wird $\|\varepsilon(v)\|_0$ statt $\|\varepsilon(v)\|_{L_2(\Omega)^{2 \times 2}}$ geschrieben.

1.3 Diskretisierungen der Displacement-Formulierung

Die Diskretisierungen der Displacement-Formulierungen haben die Form

$$(1.16) \quad \text{Finde } u_h \in \mathbf{V}_h \text{ mit } \begin{cases} u_h|_{\Gamma_D} & = 0 \\ u_h|_{\Gamma_{SC}} \cdot \mathbf{n} & = 0 \end{cases} \text{ und (1.7) für alle } v \in \mathbf{V}_h,$$

wobei die \mathbf{V}_h endlichdimensionale Räume sind, deren Dimension mit $h \rightarrow 0$ wächst.

1.3.1 Konforme Diskretisierungen

Die konforme Diskretisierung, also das Lösen der schwachen Formulierung auf geschachtelten Unterräumen $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ mit für $h \rightarrow 0$ wachsender Dimension, hat den Nachteil, dass erst bei Verwendung konformer Elemente hohen Polynomgrades kein Locking auftritt. Dabei soll Locking hier bedeuten, dass die Konvergenzrate der diskreten Lösungen (u_h) bei nahezu inkompressiblen Materialien (d. h. für großen Quotienten λ/μ) so stark sinkt, dass praktisch keine Konvergenz mehr stattfindet.

1.3.2 Nichtkonforme Diskretisierungen

Bei nichtkonformen Diskretisierungen sind die Operatoren wie $\mathbf{grad}, \varepsilon, \dots$ (jeweils von $\mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)^{2 \times 2}$) streng genommen zunächst nicht auf den nichtkonformen Räumen $\mathbf{V}_h \not\subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ definiert. In dieser Arbeit werden nichtkonforme finite Dreiecks-Elemente verwendet; dabei wird das Gebiet Ω in Dreiecke $T \in \mathcal{T}_h$ einer Zerlegung \mathcal{T}_h unterteilt, und die Funktionen aus \mathbf{V}_h sind derart, dass sie auf den Dreiecken jeweils Polynome sind. Sie sind also insbesondere beliebig oft differenzierbar. Deswegen ist es möglich und natürlich, die Operatoren „dreiecksweise“ (ohne die Ränder, also bis auf Nullmengen) zu definieren, so dass der Bildraum $L_2(\Omega)^{2 \times 2}$ derselbe bleibt, und insbesondere die Integrale des Produkts solcher Bilder definiert sind.

Für $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -Funktionen liefert diese Definition jeweils das gleiche Bild, weswegen i. d. R. in der Schreibweise zwischen diesen Operatoren nicht unterschieden wird (außer dort, wo es sonst zu Verwirrung führen kann).

Weiter sei erwähnt, dass auch die Randbedingungen evtl. nicht exakt erfüllt sind. Sie sind also nicht im eigentlichen Sinne zu verstehen, sondern nur „schwach“ erfüllt. Das bedeutet, dass nur für gewisse Funktionale L , z. B. für die Punktauswertung an bestimmten Punkten $x \in \Gamma_D$, die Bedingung $L(u_h) = 0$ gilt.

Nichtkonforme Diskretisierungen können verwendet werden, um Locking zu vermeiden. Sie haben aber den Nachteil, dass die gesamte Theorie (Existenz und Eindeutigkeit, Konvergenzaussagen) übertragen bzw. erneut hergeleitet werden muss.

Es ist natürlich erstrebenswert, möglichst einfache nichtkonforme Diskretisierungen zu verwenden: „Einfach“ heißt hier, dass die oben erwähnten Polynome möglichst niedrigen Grad haben bzw. dass der Raum \mathbf{V}_h (bei einer „festen“ Anzahl Dreiecke der Zerlegung) möglichst niedrige Dimension hat. „Einfach“ kann sich weiter auf das Erfüllen schwacher Randbedingungen beziehen.

Ein typisches Beispiel für eine einfache Diskretisierung ist die Verwendung von Crouzeix-Raviart-Elementen; d. h. dass eine Funktion $v \in \mathbf{V}_h$ auf jedem Dreieck T der

Zerlegung \mathcal{T}_h komponentenweise linear ist, v weiter jeweils am Mittelpunkt der Verbindungskante zweier benachbarter Dreiecke stetig ist, und dieser Wert an allen Randkanten $\subset \Gamma_D$ Null ist.⁵ Diese Diskretisierung ist aber problematisch, denn die diskrete Version der *Kornschen Ungleichung* ist für diese i. Allg. nicht erfüllt. Dies folgt leicht aus Dimensionsgründen (vgl. [Fal91], S. 544): Es bezeichne n_e die Anzahl der Kanten, n_D die Anzahl der Randkanten mit Dirichlet-Randbedingung, n_T die Anzahl der Dreiecke und n_b die Anzahl der Randkanten. Die Dimension des Gesamttraums ist $2(n_e - n_D)$; im Unterraum der verzerrungsfreien Funktionen gilt auf jedem Dreieck T die Gleichung $\varepsilon(v) = 0$; die Funktion ist dort also von der Form $v|_T(x, y) = (a, b)^t + c(-y, x)^t$. Dies stellt zusätzlich zu den Stetigkeits- und Null-Randbedingungen maximal $3n_T$ linear unabhängige Bedingungen an die stückweisen Vektorpolynome ersten Grades. Die Dimension d des Unterraums der verzerrungsfreien Crouzeix-Raviart-Funktionen lässt sich mittels der Ungleichung $d \geq 2(n_e - n_D) - 3n_T = n_b - 2n_D$ abschätzen (man beachte: $2n_e - 3n_t = n_b$). Die Dimension des Unterraums **kern grad** ist jedoch Null. Sobald $n_b > 2n_D$ gilt, gibt es Funktionen, die die diskrete Version der zweiten Kornschen Ungleichung nicht erfüllen. Auch numerische Ergebnisse zeigen, dass die Verwendung dieser Elemente –selbst bei nur einer Kante ohne Dirichlet-Randbedingung– problematisch ist.

Die im nächsten Kapitel eingeführten Elemente sind verhältnismäßig einfach, und die zugehörige Theorie wird dort bereitgestellt.

⁵Man denke sich Ω als beschränktes Polygon-Gebiet und die Zerlegung derart, dass eine Teilmenge der Randkanten mit Γ_D übereinstimmt.

Kapitel 2

Der Finite-Element-Raum von Mardal, Tai & Winther

Mardal, Tai und Winther schlagen in ihrer Arbeit (s. [MTW02]) den in diesem Abschnitt eingeführten Teilraum \mathbf{V}_h zur Diskretisierung vor, der mittels eines Finiten Elements $\mathbf{V}(T)$ definiert wird.

2.1 Der Finite-Element-Raum

2.1.1 Das MTW-Element

Das MTW-Element $(T, \mathbf{V}(T), \mathcal{N})$ ist wie folgt definiert.

Definition. Sei $\mathbf{V}(T)$ definiert durch

$$(2.1) \quad \mathbf{V}(T) := \left\{ v \in \mathbb{P}_3^2 \mid \operatorname{div} v \in \mathbb{P}_0, (v \cdot \mathbf{n}_e)|_e \in \mathbb{P}_1 \quad \forall e \in \mathcal{E}(T) \right\} ,$$

wobei $T \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Dreieck, \mathbb{P}_k die Menge der Polynome vom Grad $\leq k$ und $\mathcal{E}(T)$ die Menge der Kanten von T sei. Außerdem sei \mathbf{n}_e der äußere Normaleneinheitsvektor an die Kante e (bzgl. einer mathematisch positiven Orientierung der Kanten). Schließlich sei \mathbf{t}_e der Tangenteneinheitsvektor an e , und $\tau = \tau_e$ sei die Bogenlänge von e .

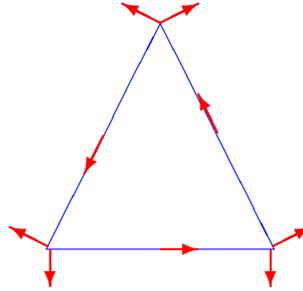
Der Raum $\mathbf{V}(T)$ hat die Dimension 9. Eine Funktion $v \in \mathbf{V}(T)$ hat die Freiheitsgrade

$$(2.2) \quad \int_e (v \cdot \mathbf{n}_e) \tau^k d\tau \quad (e \in \mathcal{E}(T), k = 0, 1) ,$$

$$(2.3) \quad \int_e (v \cdot \mathbf{t}_e) d\tau \quad (e \in \mathcal{E}(T)) .$$

Die Menge dieser 9 Funktionalen sei mit $\tilde{\mathcal{N}}$ bezeichnet. Wegen der Linearität von $v \cdot \mathbf{n}_e$ auf den Kanten kann man statt (2.2) auch die Normalkomponente am Anfangs- und Endpunkt einer jeden Kante als Freiheitsgrad vorgeben. Die Menge $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_9)$ besteht nun aus den 9 Funktionalen N_i , die sich durch die soeben angesprochene Modifikation ergeben. \triangle

Abbildung 2.1: Das MTW-Element



Jede Funktion $v \in \mathbf{V}(T)$ ist also durch Vorgabe der 9 Werte $N_i(v)$ eindeutig bestimmt. Unter „der“ Basis von $\mathbf{V}(T)$ versteht man die *nodale* Basis (ϕ) ; das ist die Dualbasis von \mathcal{N} (also diejenige mit $N_i(\phi_j) = \delta_{ij}$).

Bemerkung. Für jede Kante $e \in \mathcal{E}(T)$ ist diejenige nodale Basisfunktion $\phi_{\mathbf{t}_e}$, die durch $\int_e (v \cdot \mathbf{t}_e) d\tau = 1$ definiert ist, ein Vielfaches derjenigen Funktion $\tilde{\phi}_{\mathbf{t}_e}$, für die stattdessen $\tilde{\phi}_{\mathbf{t}_e}(m_e) = 1$ ist. Wenn man allerdings statt (2.3) die Punktauswertung am Mittelpunkt verwendet, erhält man einen anderen FE-Raum, sobald dieser auf einer Triangulierung mit mehr als einem Dreieck gebildet wird.

2.1.2 Der MTW-Raum \mathbf{V}_h

Es wird jetzt zunächst eine – einfache, aber etwas ungenaue – umgangssprachliche Beschreibung des Raumes \mathbf{V}_h gegeben.

Umgangssprachliche Beschreibung von \mathbf{V}_h

Sei $\mathcal{T} := \{\mathcal{T}_h\}$ eine nicht entartete Familie von Zerlegungen von Ω , wobei h jeweils der maximale Durchmesser sei. Dann enthält der Raum $\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h(\mathcal{T})$ diejenigen Funktionen $v \in L_2(\Omega)^2$, die

- eingeschränkt auf jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ aus $\mathbf{V}(T)$ sind

und für jede Kante e (bis auf eine Teilmenge der Randkanten) genau die drei Freiheitsgrade

- Normalkomponente am Anfangspunkt,
- Normalkomponente am Endpunkt und
- Integral der Tangentialkomponente

besitzen. Dieser Sachverhalt wird mit den nun folgenden Definitionen formal korrekt angegeben.

Definitionen. Sei $\mathcal{T} := \{\mathcal{T}_h\}$ eine quasiuniforme Familie von Zerlegungen von Ω , der maximale Durchmesser einer Zerlegung \mathcal{T}_h sei h . Sei \mathcal{X}_h die Menge der Eck- und \mathcal{M}_h die Menge der Mittelpunkte. Weiter sei \mathcal{E}_h die Menge der Kanten. Für letztere werde eine positive Richtung festgelegt und die Menge dieser gerichteten Kanten mit \mathcal{E}_h^+ bezeichnet¹. Entsprechend sei \mathcal{E}_h^- definiert, und $\mathcal{E}_h^{+/-}$ sei die Menge der gerichteten Kanten von \mathcal{T}_h . Sei \mathcal{E}_h^R die Menge der Randkanten und \mathcal{E}_h^I die Menge der inneren Kanten: $\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^R \cup \mathcal{E}_h^I$. Eine entsprechende Bedeutung kommt \mathcal{X}_h^R , \mathcal{X}_h^I , \mathcal{M}_h^R und \mathcal{M}_h^I zu. Dann kommt jede innere Kante $e \in \mathcal{E}_h$ genau zweimal in $\mathcal{E}_h^{+/-}$ vor (bezeichnet mit e^+ und e^-), jede äußere Kante genau einmal. Seien x_e^A , m_e und x_e^E der Anfangs-, Mittel- und Endpunkt einer Kante $e \in \mathcal{E}_h^{+/-}$. Es gilt dann $x_{e^-}^A = x_{e^+}^E$ für eine innere Kante $e \in \mathcal{E}_h^I$. Zu einer Kante $e \in \mathcal{E}_h^I$ seien T_{e^+} und T_{e^-} die beiden „zugehörigen“ Dreiecke. Für eine positiv/negativ gerichtete Kante $e \in \mathcal{E}_h^{+/-}$ seien \mathbf{n}_e der äußere/innere Normaleneinheitsvektor und $\mathbf{t}_e/-\mathbf{t}_e$ der Tangenteneinheitsvektor in Richtung e (so dass also für $e \in \mathcal{E}_h$ sowohl $\mathbf{n}_e = \mathbf{n}_{e^+} = \mathbf{n}_{e^-}$ als auch $\mathbf{t}_e = \mathbf{t}_{e^+} = \mathbf{t}_{e^-}$ eindeutig definiert ist). Außerdem sei $\emptyset \subset \mathcal{E}_h^D \subset \mathcal{E}_h^R$ die Menge der Dirichlet-Randkanten. Selbstverständlich ist für eine Funktion f , die auf einem offenen Dreieck T definiert ist, und für einen Punkt x_0 auf dessen Rand ∂T mit $f(x_0)$ der Wert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ gemeint.

Für das Lochscheibenviertel bezeichne \mathcal{E}_h^{SC} die Menge der Kanten mit den Symmetrierandbedingungen. \triangle

Definition. Mit den vorigen Definitionen ist der Raum $\mathbf{V}_h := \mathbf{V}_h(\mathcal{T}) := \mathbf{V}_h(\mathcal{T}, \mathcal{E}_h^D)$ definiert durch

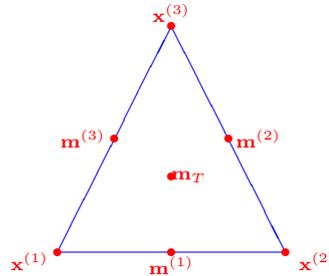
$$\mathbf{V}_h := \left\{ v \in L_2(\Omega)^2 \mid \begin{array}{l} \forall T \in \mathcal{T}_h : v|_T \in \mathbf{V}(T), \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^D : \int_e v|_{T_e} \cdot \mathbf{t}_e \, ds = 0, \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^D : (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_e}(x_e^A) = 0, \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^D : (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_e}(x_e^E) = 0, \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^I : \int_e v|_{T_{e^-}} \cdot \mathbf{t}_e \, ds = \int_e v|_{T_{e^+}} \cdot \mathbf{t}_e \, ds, \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^I : (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_{e^-}}(x_{e^-}^A) = (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_{e^+}}(x_{e^+}^E), \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^I : (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_{e^-}}(x_{e^-}^E) = (v \cdot \mathbf{n}_e)|_{T_{e^+}}(x_{e^+}^A) \end{array} \right\}.$$

\triangle

AKS-Raum. Es sei noch einmal erwähnt: Wenn man den dritten Freiheitsgrad (2.3) dahingehend abändert, dass man statt des *Integrals* der Tangentialkomponente deren *Funktionswert am Kantenmittelpunkt* verwendet, dann erhält man einen anderen FE-Raum. Dieser ist dem MTW-Raum sicher in gewissem Sinne ähnlich, aber nicht mit ihm identisch. Der entsprechend veränderte Raum heißt AKS-Raum.

Für diesen Raum ergibt sich eine entsprechende Definition; dabei ist allerdings zu beachten, dass bei einer homogenen Dirichlet-Randbedingung auf einer Teilmenge \mathcal{E}_h^D

¹Man kann sich eine solche gerichtete Kante als Quadrupel $(e, +, x_e^A, x_e^E)$ vorstellen.

Abbildung 2.2: Dreieck T 

der Randkanten auf diesen zunächst nicht notwendig das Integral der Tangentialkomponente gleich Null ist. Dies ist aber der Fall, wenn man bei solchen Randkanten den Funktionswert an den Kantenenden gleich Null setzt. Dies erreicht man durch Nullsetzen von Basisfunktionen angrenzender Kanten, also durch Streichen weiterer Freiheitsgrade.

Lochscheibenviertel. Für das Lochscheibenviertel definiert man den Raum entsprechend, wobei von den drei Bedingungen auf \mathcal{E}_h^D die an die Tangentialkomponente gestellte zu streichen ist, und bei den beiden übrigen \mathcal{E}_h^D durch \mathcal{E}_h^{SC} zu ersetzen ist.

Skalierung. Versieht man den Raum \mathbf{V}_h mit dem Energie-Skalarprodukt $a = a_h = a_{h,\lambda}$, lässt sich für den Teil $a_1 := (\cdot, \cdot)_{\mathcal{E}}$ des Skalarproduktes folgendes bemerken: Die Werte $a_1(\phi_j, \phi_j)$ liegen für Basisfunktionen ϕ_j , die zu Normalkomponenten gehören, in der Größenordnung von 1, wohingegen die zu Tangentialkomponenten in der Größenordnung von $|e|^{-2}$ liegen, wenn e die entsprechende Kante bezeichnet. Das heißt, die Diagonaleinträge der Matrix $(a_1(\phi_i, \phi_j))_{i,j}$ sind unterschiedlich skaliert. Das bedeutet, dass für $h \rightarrow \infty$ die Konditionszahl der so aufgestellten Matrix gegen ∞ strebt. Wenn man die entsprechenden Freiheitsgrade (2.3) hingegen zu $|e|^{-1} \int_e v \cdot \mathbf{t}_e \, d\tau$ ändert², liegen alle Diagonaleinträge in derselben Größenordnung.

Für $\lambda \rightarrow \infty$ streben die Diagonaleinträge der Matrix $(a_{h,\lambda}(\phi_i, \phi_j))_{i,j}$ von Basisfunktionen zu Normalkomponenten gegen ∞ , während die anderen Diagonaleinträge unverändert bleiben. Selbst bei größten Triangulierungen kann dies für große λ schon beim Aufstellen der entsprechenden Matrix zu einer beliebig schlecht konditionierten Matrix führen.

2.1.3 Elementweise Darstellung des MTW-Raumes

Es sei $T \in \mathcal{T}_h$ ein Dreieck mit Mittelpunkt \mathbf{m}_T , Eckpunkten $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ und $\mathbf{x}^{(3)}$ sowie Kantenmittelpunkten $\mathbf{m}^{(1)}$, $\mathbf{m}^{(2)}$ und $\mathbf{m}^{(3)}$ (s. Abb. 2.2).

²Im Ggs. zu der vorher angesprochenen Änderung des entsprechenden Freiheitsgrades (2.3) ist diese Bedingung offensichtlich nur eine *Skalierung* der zugehörigen nodalen Basisfunktionen.

Es sei jetzt (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) die Standard-Basis der linearen Funktionen auf T (definiert durch $\phi_i(\mathbf{x}^{(j)}) = \delta_{ij}$). Weiter sei b die Bubble-Funktion, normiert auf $b(\mathbf{m}_T) = 1$, definiert durch $b = \tilde{b}/\tilde{b}(\mathbf{m}_T)$ mit $\tilde{b} = \phi_1 \phi_2 \phi_3$. Schließlich seien ψ_1, ψ_2 und ψ_3 die linearen Crouzeix-Raviart Basisfunktionen, definiert durch $\psi_i(\mathbf{m}^{(j)}) = \delta_{ij}$.

Elementweise Darstellung

Jede Funktion $v \in \mathbf{V}_h$ mit $v_T := v|_T$ lässt sich auf jedem Dreieck T der Zerlegung lokal darstellen als

$$(2.4) \quad v_T = \alpha \phi_1 + \beta \phi_2 + \gamma \phi_3 + \rho \nabla^\perp(\psi_1 b) + \sigma \nabla^\perp(\psi_2 b) + \tau \nabla^\perp(\psi_3 b) \quad ,$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2$ und $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}$ sind.

Beweis. Sei $\widetilde{\mathbf{V}}(T) := \{ v_T : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2, \rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R} \}$. Es wird gezeigt, dass $\widetilde{\mathbf{V}}(T)$ Teilraum von $\mathbf{V}(T)$ gleicher Dimension ist. Es ist klar, dass es sich um Polynome dritten Grades handelt, dass deren Divergenz konstant ist und die Normalkomponente der ersten drei Summanden linear ist. Für $\widetilde{\mathbf{V}}(T) \subset \mathbf{V}(T)$ bleibt zu zeigen, dass die Normalkomponente der letzten drei Summanden linear ist. Es seien $\mathbf{n}_j, \mathbf{t}_j$ der Normalen- und Tangenteneinheitsvektor der zum Mittelpunkt $\mathbf{m}^{(j)}$ gehörenden Kante e_j . Man berechnet leicht³

$$(2.5) \quad \nabla^\perp(\psi_i b)|_{e_j}(\mathbf{n}_j, \mathbf{t}_j) = (\psi_i \nabla^\perp b)|_{e_j}(\mathbf{n}_j, \mathbf{t}_j) = \psi_i|_{e_j} \nabla b|_{e_j}(\pm \mathbf{t}_j, \pm \mathbf{n}_j)$$

und (die Indizes sind von nun an modulo 3 zu verstehen)

$$(2.6) \quad \nabla b|_{e_j} = c \left[\mathbf{n}_{j-1}^T(\cdot - \mathbf{x}^{(j-1)}) \right] \left[\mathbf{n}_{j+1}^T(\cdot - \mathbf{x}^{(j+1)}) \right] \mathbf{n}_j$$

mit einer Konstante $c \neq 0$. Also ist die Normalkomponente der letzten drei Basisfunktionen sogar jeweils Null, und es gilt $\widetilde{\mathbf{V}}(T) \subset \mathbf{V}(T)$. Es bleibt zu zeigen, dass $\widetilde{\mathbf{V}}(T)$ Dimension 9 hat. Es gelte

$$v = \alpha^{(1)} \phi_1 + \alpha^{(2)} \phi_2 + \alpha^{(3)} \phi_3 + \alpha_1 \nabla^\perp(\psi_1 b) + \alpha_2 \nabla^\perp(\psi_2 b) + \alpha_3 \nabla^\perp(\psi_3 b) = 0 \quad .$$

Dann ist zu zeigen, dass alle Koeffizienten Null sind. Es ist

$$(v \cdot \mathbf{n}_j)|_{\mathbf{x}^{(i)}} = \mathbf{n}_j \cdot \alpha^{(i)} \quad i = j, j+1; \quad j = 1, 2, 3 \quad .$$

Wegen $v = 0$ sind insbesondere die Normalkomponenten an den Eckpunkten $\mathbf{x}^{(i)}$ Null, und es folgt $\alpha^{(i)} = 0$ für $i = 1, 2, 3$. Es gilt weiter

$$(v \cdot \mathbf{t}_j)|_{\mathbf{m}^{(j)}} = \left(\frac{1}{2} (\alpha^{(j)} + \alpha^{(j+1)}) + (\nabla^\perp b)|_{\mathbf{m}^{(j)}} \alpha_j \right) \mathbf{t}_j = \alpha_j \mathbf{t}_j \cdot (\nabla^\perp b)|_{\mathbf{m}^{(j)}} \quad ,$$

und da wegen (2.5) und (2.6) stets $\mathbf{t}_j \cdot (\nabla^\perp b)|_{\mathbf{m}^{(j)}} \neq 0$ gilt, folgt schließlich $\alpha_j = 0$ für $j = 1, 2, 3$; denn auch die Tangentialkomponenten müssen –insbesondere am Mittelpunkt– jeweils verschwinden. \square

³Die Kombination der Vorzeichen vor \mathbf{t}_j und \mathbf{n}_j hängt von der Orientierung dieser beiden Vektoren und von der Orientierung von ∇^\perp ab.

Es soll jetzt noch eine Darstellung der nodalen Basisfunktionen $\xi_{\mathbf{x}^{(i)}}^{(j)}$ und $\xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)}$ für $i = j, j+1$ und $j = 1, 2, 3$ gegeben werden. Bei den Funktionen $\xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)}$ ist offensichtlich jeweils nur der Koeffizient $\alpha_j \neq 0$. Exakte Integration mit der Simpson-Regel liefert

$$\int_{e_j} \xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)} \cdot \mathbf{t}_j \, ds = \alpha_j \frac{2}{3} |e_j| (\nabla^\perp b)|_{\mathbf{m}^{(j)}} \mathbf{t}_j = \alpha_j \frac{9}{4} \frac{|e_j|^2}{|T|} ,$$

also

$$(2.7) \quad \xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)} = \frac{4}{9} \frac{|T|}{|e_j|^2} \nabla^\perp(\psi_j b) .$$

Die Funktionen $\xi_{\mathbf{x}^{(i)}}^{(j)}$ sind demnach offensichtlich von der Form

$$\xi_{\mathbf{x}^{(j)}}^{(j)} = \frac{1}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1}} \phi_j \mathbf{t}_{j-1} + c_{j,j} \xi_{\mathbf{m}^{(j-1)}}^{(j-1)} + d_{j,j} \xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)}$$

und

$$\xi_{\mathbf{x}^{(j+1)}}^{(j)} = \frac{1}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j+1}} \phi^{(j+1)} \mathbf{t}_{j+1} + c_{j,j+1} \xi_{\mathbf{m}^{(j)}}^{(j)} + d_{j,j+1} \xi_{\mathbf{m}^{(j+1)}}^{(j+1)} .$$

Mit der Trapezregel (TR) erhält man zur Berechnung von $c_{j,j}, d_{j,j}$

$$\int_{e_{j-1}} \xi_{\mathbf{x}^{(j)}}^{(j)} \cdot \mathbf{t}_{j-1} \, ds = \frac{1}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1}} \int_{e_{j-1}} \phi_j \, ds + c_{j,j} \stackrel{\text{TR}}{=} \frac{|e_{j-1}|}{2 \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1}} + c_{j,j} = 0$$

und analog

$$\int_{e_j} \xi_{\mathbf{x}^{(j)}}^{(j)} \cdot \mathbf{t}_j \, ds = \frac{|e_j|}{2} \frac{\mathbf{t}_{j-1} \cdot \mathbf{t}_j}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1}} + d_{j,j} = 0 .$$

Ebenso verfährt man mit $c_{j,j+1}, d_{j,j+1}$ und erhält

$$(2.8) \quad \xi_{\mathbf{x}^{(j)}}^{(j)} = \frac{\phi_j \mathbf{t}_{j-1} - \frac{2|T|}{9} \left(\frac{1}{|e_{j-1}|} \nabla^\perp(\psi_{(j-1)} b) - \frac{\mathbf{t}_{j-1} \cdot \mathbf{t}_j}{|e_j|} \nabla^\perp(\psi_{(j)} b) \right)}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j-1}}$$

und

$$(2.9) \quad \xi_{\mathbf{x}^{(j+1)}}^{(j)} = \frac{\phi^{(j+1)} \mathbf{t}_{j+1} - \frac{2|T|}{9} \left(\frac{\mathbf{t}_{j+1} \cdot \mathbf{t}_j}{|e_j|} \nabla^\perp(\psi_{(j)} b) - \frac{1}{|e_{j+1}|} \nabla^\perp(\psi_{(j+1)} b) \right)}{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{t}_{j+1}} .$$

Bemerkung. Sollen die Basisfunktionen gemäß der Bemerkung zur Skalierung im vorigen Abschnitt skaliert werden, so muss man nur den Wert der Konstante aus (2.7) zu $\frac{4}{9} \frac{|T|}{|e_j|}$ ändern.

2.2 Schwache Formulierung und zugehörige Theorie

2.2.1 Schwache Formulierung im MTW-Raum

Für die schwache Formulierung im MTW-Raum sei vorausgesetzt, dass es sich bei Ω um ein beschränktes Polygon-Gebiet handelt; die Triangulierungen seien derart, dass $\partial\Omega = \mathcal{E}_h^R$ und vor allem $\Gamma_D = \mathcal{E}_h^D$ (bzw. $\Gamma_{SC} = \mathcal{E}_h^{SC}$) gilt. Die schwache Formulierung lautet nun wie folgt:

$$(2.10) \quad \text{Finde } u = u_h \in \mathbf{V}_h \text{ mit (1.7) für alle } v \in \mathbf{V}_h,$$

wobei \mathbf{V}_h der in den vorigen Abschnitten eingeführte MTW-Raum ist; d. h. insbesondere, dass die homogenen Dirichlet-Randbedingungen nicht mehr exakt erfüllt sein müssen.

Es ergeben sich sofort Fragen nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u_h und nach Konvergenzaussagen für $h \rightarrow 0$. Im Falle der Konvergenz ist neben der Ordnung auch interessant, ob die Konvergenz unabhängig von λ stattfindet. Diesen Fragen soll in den nächsten beiden Abschnitten nachgegangen werden.

2.2.2 Diskrete Kornsche Ungleichung

Für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung u_h des diskreten Problems (2.10) muss die diskrete Bilinearform a_h positiv definit sein. Für den Nachweis der Konvergenz der diskreten Lösungen u_h gegen die Lösung u der schwachen Formulierung des Elastizitätsproblems (1.10) benötigt man die Koerzivität von a_h . Beides kann aus der diskreten Version der (zweiten) Kornschen Ungleichung gefolgert werden.

Satz (Kornsche Ungleichung für MTW-Räume)

Sei Ω ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet, das von einem Polygonzug berandet wird, und sei $\mathcal{T} := (\mathcal{T}_h)$ eine Folge quasiuniformer geschachtelter Triangulierungen dieses Gebietes. Handelt es sich nicht um das Lochscheibenviertel, so seien auf mindestens einer Randkante e_0 der größten Triangulierung die drei Freiheitsgrade einer Funktion u_h gleich Null. Dann gilt

$$(2.11) \quad \|u_h\|_1 \leq C \|\varepsilon(u_h)\|_0 \quad ,$$

wobei die Konstante C neben e_0 und Ω nur vom Infimum der Winkel der Dreiecke der Familie \mathcal{T} der Triangulierungen \mathcal{T}_h abhängt.

Beweis. Es handle sich zunächst nicht um die Diskretisierungen des Lochscheibenviertels. Nach dem Artikel von Brenner (s. [Bre04]) gilt

$$(2.12) \quad \|u_h\|_1^2 \leq C \left\{ \|\varepsilon(u_h)\|_0^2 + \sup_{m \in \mathbf{RM}} \frac{(m, u_h)_{0,e_0}^2}{\|m\|_{0,e_0}^2} + \sum_{e \in \mathcal{E}^I} \frac{1}{h_e} \|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2 \right\} .$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{RM} = \mathbf{RM}(\Omega)$ den Raum der Rigid-Body-Motions,

$$\mathbf{RM} = \left\{ m \mid m(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad ,$$

und \mathbf{P}_e^1 bezeichnet die komponentenweise $L_2(e)$ -orthogonale Projektion auf den Raum der affin-linearen Vektorfunktionen.

Wegen der Null-Randbedingung an die affin-lineare Normalkomponente von u_h erhält man $(m, u_h)_{0,e_0} = (m \cdot \mathbf{t}_{e_0}, u_h \cdot \mathbf{t}_{e_0})_{0,e_0}$, wenn man u_h und m jeweils in Tangential- und Normalkomponente aufteilt. Sei γ eine Parametrisierung von e_0 bzgl. der Kantenlänge, also von der Form $\gamma(s) = \mathbf{a} + s \mathbf{t}_{e_0}$. Dann hat m die Form $m(\gamma(s)) = \mathbf{b} + s \mathbf{n}_{e_0}$, weshalb die Tangentialkomponente $m \cdot \mathbf{t}_{e_0}$ bei der Integration konstant ist. Wegen $\int_{e_0} u_h \cdot \mathbf{t}_{e_0} ds = 0$ vereinfacht sich (2.12) zu

$$(2.13) \quad \|u_h\|_1^2 \leq C \left\{ \|\varepsilon(u_h)\|_0^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}^I} \frac{1}{h_e} \|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2 \right\} .$$

Jetzt soll auf der rechten Seite noch der hintere Term durch den vorderen abgeschätzt werden.

Dazu erhält man ebenfalls durch Aufspaltung in Normal- und Tangentialkomponenten zunächst $\mathbf{P}_e^1([u_h]_e) = P_e^1([u_h]_e \cdot \mathbf{t}_e) \mathbf{t}_e$, wobei P_e^1 die $L_2(e)$ -orthogonale Projektion auf den Raum der affin-linearen reellwertigen Funktionen bezeichnet. Sei γ eine Parametrisierung von e bzgl. der Kantenlänge. Zur Vereinfachung sei $f = [u_h]_e \cdot \mathbf{t}_e$, $p = f(\gamma)$ und $\hat{p} = p(h_e \cdot)$. Da das Integral des Sprungs der Tangentialkomponente einer MTW-Funktion an einer Kante Null ist, ist $P_e^0(f) = 0$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2 &= \|P_e^1(f) \mathbf{t}_e\|_{0,e}^2 \\
&= \|P_e^1(f)\|_{0,e}^2 \\
&\leq \|f\|_{0,e}^2 \\
&= \|f - P_e^0(f)\|_{0,e}^2 \\
&= \|p - P_e^0(p)\|_{L_2([0,h_e])}^2 \\
(2.14) \quad &= h_e \|\hat{p} - P_e^0(\hat{p})\|_{L_2([0,1])}^2 \\
&\lesssim h_e \|(\hat{p} - P_e^0(\hat{p}))'\|_{L_2([0,1])}^2 \\
&= h_e^3 \|p'(h_e \cdot)\|_{L_2([0,1])}^2 \\
&= h_e^2 \|p'\|_{L_2([0,h_e])}^2 \\
&= h_e^2 \|(\mathbf{grad} f)(\gamma) \cdot \mathbf{t}_e\|_{L_2([0,h_e])}^2 \\
&= h_e^2 \|\partial_{\mathbf{t}_e} f\|_{0,e}^2,
\end{aligned}$$

wobei $h_e = |e|$ die Länge der Kante e ist und die zweite Ungleichung gilt, da alle Normen auf dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\{\tilde{p} : \tilde{p} = \hat{p} - P_e^0(\hat{p}), \hat{p} \in \mathbb{P}_3([0,1])\}$ äquivalent sind. Dabei soll das Zeichen „ \lesssim “ für „ $\leq c$ “ stehen, und c ist jeweils eine Konstante, die von denjenigen Größen unabhängig ist, bzgl. derer unabhängig abgeschätzt werden soll (hier: h_e, h).

Seien wieder T_{e^+} und T_{e^-} die beiden an eine innere Kante e angrenzenden Dreiecke; dann ist

$$\partial_{\mathbf{t}_e} f = \partial_{\mathbf{t}_e}([u_h]_e \cdot \mathbf{t}_e) = \partial_{\mathbf{t}_e}(u_h \cdot \mathbf{t}_e)|_{T_{e^+}} - \partial_{\mathbf{t}_e}(u_h \cdot \mathbf{t}_e)|_{T_{e^-}}$$

auf ganz e . Dies ergibt

$$\begin{aligned}
\|\partial_{\mathbf{t}_e} f\|_{0,e} &= \left\| (\mathbf{t}_e^T \nabla u_h \mathbf{t}_e)|_{T_{e^+}} - (\mathbf{t}_e^T \nabla u_h \mathbf{t}_e)|_{T_{e^-}} \right\|_{0,e} \\
&= \left\| (\mathbf{t}_e^T \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) \mathbf{t}_e)|_{T_{e^+}} - (\mathbf{t}_e^T \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) \mathbf{t}_e)|_{T_{e^-}} \right\|_{0,e} \\
(2.15) \quad &\leq \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) \mathbf{t}_e|_{T_{e^+}} \right\|_{\text{Eukl}} + \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h) \mathbf{t}_e|_{T_{e^-}} \right\|_{\text{Eukl}} \\
&\leq \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_{T_{e^+}} \right\|_{\text{Frob}} + \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_{T_{e^-}} \right\|_{\text{Frob}} \\
&= \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_{T_{e^+}} \right\|_{0,e} + \left\| \boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_{T_{e^-}} \right\|_{0,e}.
\end{aligned}$$

Es ist

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_T\|_{0,e} \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}(u_h)|_T\|_{0,\partial T}.$$

Es sei \hat{T} das Referenzdreieck und $F_T(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ eine affin-lineare Transformation von $\hat{T} \rightarrow T$. Sei $\hat{u}_h := u_h \circ F_T$, also $u_h = \hat{u}_h \circ F_T^{-1}$ und $\partial\hat{T} = F_T^{-1}(\partial T)$. Den hinteren Term kann man mit Substitutionen/Transformationen dann wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon(u_h)|_T\|_{0,\partial T}^2 &= \frac{1}{4} \|\nabla u_h + \nabla u_h^T\|_{0,\partial T}^2 \\
&= \frac{1}{4} \|\nabla \hat{u}_h \circ F_T^{-1} \mathbf{B}^{-1} + (\nabla \hat{u}_h \circ F_T^{-1} \mathbf{B}^{-1})^T\|_{0,\partial T}^2 \\
&\lesssim \|\mathbf{B}\| \|\nabla \hat{u}_h \mathbf{B}^{-1} + (\nabla \hat{u}_h \mathbf{B}^{-1})^T\|_{0,\partial \hat{T}}^2 \\
(2.16) \quad &\lesssim \|\mathbf{B}\| \|\nabla \hat{u}_h \mathbf{B}^{-1} + (\nabla \hat{u}_h \mathbf{B}^{-1})^T\|_{0,\hat{T}}^2 \\
&= \|\mathbf{B}\| \|\nabla u_h \circ F_T + (\nabla u_h \circ F_T)^T\|_{0,\hat{T}}^2 \\
&= \|\mathbf{B}\| |\det \mathbf{B}|^{-1} \|\nabla u_h + \nabla u_h^T\|_{0,T}^2 \\
&\lesssim h_T^{-1} \|\varepsilon(u_h)\|_{0,T}^2 \quad ;
\end{aligned}$$

denn $\|\cdot\|_{0,\partial\hat{T}}$ und $\|\cdot\|_{0,\hat{T}}$ sind auf dem endlichdimensionalen Vektorraum \mathbb{P}_2 äquivalent. Also gilt

$$(2.17) \quad \|\varepsilon(u_h)|_T\|_{0,e}^2 \lesssim h_e^{-1} \|\varepsilon(u_h)\|_{0,T}^2 \quad .$$

Mit (2.14), (2.15) und (2.17) ergibt sich

$$\|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2 \lesssim h_e \left(\|\varepsilon(u_h)\|_{0,T_{e+}}^2 + \|\varepsilon(u_h)\|_{0,T_{e-}}^2 \right) \quad ,$$

was mit Summation über die inneren Kanten

$$(2.18) \quad \sum_{e \in \mathcal{E}^I} \frac{1}{h_e} \|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\varepsilon(u_h)\|_{0,T}^2 = \|\varepsilon(u_h)\|_0^2$$

liefert, da jedes Dreieck höchstens dreimal vorkommt. Dies beweist schließlich mit (2.13) die Diskrete Kornsche Ungleichung für den Fall, dass es sich nicht um das Lochscheibenviertel handelt.

Für die Diskretisierungen⁴ des Lochscheibenviertels $\Omega_1 = \Omega_{1,h}$ wird zunächst die Gültigkeit der zweiten Kornschen Ungleichung für die Diskretisierungen der Lochscheibe $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ bewiesen. Dazu sei

$$(2.19) \quad \widehat{\mathbf{V}}_h := \left\{ v \in \mathbf{V}_h(\Omega) : \int_{\Omega} v \, dx = 0, \int_{\Omega} \operatorname{rot} v = 0 \right\} \quad .$$

Nach dem Artikel von Brenner (s. [Bre04]) gilt zunächst

$$(2.20) \quad \|u_h\|_1^2 \leq C \left(\|\varepsilon(u_h)\|_0^2 + \left| \int_{\Omega} u_h \, dx \right|^2 + \left| \int_{\Omega} \operatorname{rot} u_h \, dx \right|^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^I} \frac{\|\mathbf{P}_e^1([u_h]_e)\|_{0,e}^2}{h_e} \right),$$

wobei die Konstante C die im Satz angegebenen Eigenschaften hat⁵. Dies impliziert (zusammen mit der vorangegangenen Abschätzung des letzten Summanden) sofort die zweite Kornsche Ungleichung für jede Diskretisierung der Lochscheibe:

$$\|\hat{u}_h\|_1^2 \lesssim \|\varepsilon(\hat{u}_h)\|_0^2 \quad \text{für alle } \hat{u}_h \in \widehat{\mathbf{V}}_h \quad .$$

⁴Der Index h wird für die Diskretisierungen hier im Beweis unterdrückt.

⁵Das bedeutet, dass auf einer Familie von *geschachtelten* Triangulierungen die Konstante nur vom kleinsten Winkel abhängt.

Um die diskrete Kornsche Ungleichung für Ω_1 (bzw. \mathbf{V}_h) zu zeigen, reicht es aus, zu $v \in \mathbf{V}_h$ eine Funktion $\hat{v} \in \widehat{\mathbf{V}}_h$ mit

$$(2.21) \quad \|\varepsilon(\hat{v})\|_0 \lesssim \|\varepsilon(v)\|_0 \quad \text{und} \quad \|v\|_1 \lesssim \|\hat{v}\|_1$$

zu konstruieren – es folgt dann sofort

$$\|v\|_1 \lesssim \|\hat{v}\|_1 \lesssim \|\varepsilon(\hat{v})\|_0 \lesssim \|\varepsilon(v)\|_0 .$$

Mit

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -Q_3 \quad \text{und} \quad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -Q_4$$

definiert man $\hat{v}|_{\Omega_i}(x) := Q_i v(Q_i x)$. Es gilt offensichtlich $\hat{v} \in \mathbf{V}_h(\Omega)$; für $\hat{v} \in \widehat{\mathbf{V}}_h$ verbleibt, $\int_{\Omega} \hat{v} \, dx = 0$ und $\int_{\Omega} \text{rot } \hat{v} \, dx = 0$ zu zeigen.

Dies folgt sofort aus der Linearität des Integrals und der Transformationsformel ($L \in \{\text{id}, \text{rot}\}$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} L \hat{v} \, dx &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} L(Q_i v(Q_i x)) \, dx \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_1} L(Q_i v(x)) \, dx \\ &= \int_{\Omega_i} L\left(\left(\sum_{i=1}^4 Q_i\right)v(x)\right) \, dx = 0 . \end{aligned}$$

Jetzt bleibt noch (2.21) zu zeigen; es gilt

$$(\mathbf{grad} \hat{v}|_{\Omega_i})(x) = Q_i \mathbf{grad} v(Q_i x) Q_i^{-1} ,$$

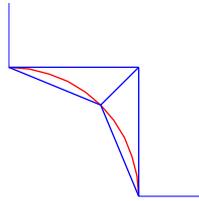
und somit auch

$$(\varepsilon \hat{v}|_{\Omega_i})(x) = Q_i \varepsilon(v(Q_i x)) Q_i^{-1} ,$$

und also schließlich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{grad} \hat{v}\|_0^2 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \|Q_i \mathbf{grad} v(Q_i x) Q_i^{-1}\|_F^2 \, dx \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \|\mathbf{grad} v(Q_i x)\|_F^2 \, dx \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_1} \|\mathbf{grad} v(x)\|_F^2 \, dx \\ &= 4 \|\mathbf{grad} v\|_0^2 , \end{aligned}$$

Abbildung 2.3: Schlechte Triangulierung am gekurvten Rand der Lochscheibe.



(und analog direkt die Behauptung $\|\varepsilon(\hat{v})\|_0 \lesssim \|\varepsilon(v)\|_0$) sowie

$$\begin{aligned}
 \|\hat{v}\|_0^2 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \|Q_i v(Q_i x)\|_F^2 dx \\
 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_i} \|v(Q_i x)\|_F^2 dx \\
 &= \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_1} \|v(x)\|_F^2 dx \\
 &= 4 \|v\|_0^2 .
 \end{aligned}$$

Also ist schließlich die diskrete Kornsche Ungleichung auch für das Lochscheibenviertel bewiesen. \square

Folgerung

Die gestellten diskreten Variationsprobleme haben genau eine Lösung.

Bemerkung. Die Abschätzung „für die Lochscheibe“ ist hier „unabhängig von h “ nur für eine *geschachtelte, quasiuniforme* Familie von Triangulierungen eines *polygonal berandeten* Gebietes bewiesen worden. Bei dem „gekrümmten“ Randstück der Lochscheibe sind die Dreiecke der Triangulierungen polygonale Approximationen an *krummlinige* Dreiecke. Es ist z. B. klar, dass, wenn man die größte Triangulierung schlecht wählt, das Infimum des kleinsten Winkels der nichtgeschachtelten Triangulierungen gegen Null strebt (s. Abb. 2.3).

Bemerkung. Die diskrete Kornsche Ungleichung gilt auch für die AKS-Elemente, die die Normalkomponenten am Kanten-Anfangs- und Endpunkt sowie die Tangentialkomponenten am Kanten-Mittelpunkt als Freiheitsgrade haben (und nicht deren Integral), wenn man als Null-Randbedingung auf e_0 zusätzlich fordert, dass auch noch die „ e_0 -nahen“ Normalkomponenten an den an e_0 angrenzenden Kanten gleich Null sind; denn dies impliziert sofort $\int_{e_0} u_h \cdot \mathbf{t}_{e_0} ds = 0$, womit sich der Beweis wörtlich überträgt.

Numerische Ergebnisse legen allerdings die Vermutung nahe, dass die Ungleichung sogar gilt, wenn man dies nicht zusätzlich fordert.

Es verbleibt die Frage nach Konvergenzaussagen von $\|u - u_h\|_a$ (für $h \rightarrow 0$). Mit dieser beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

2.2.3 Der Diskretisierungsfehler

Nach dem zweiten Lemma von Strang (s. [Bra03, Kap. III]) erhält man für den Diskretisierungsfehler in der \mathbf{H}^1 -Norm, $\|u - u_h\|_1$, zwischen schwacher Lösung u von (1.10) und diskreter Lösung u_h von (2.10) eine Abschätzung, die sich wegen

$$(2.22) \quad |a(u, v)| \lesssim \|u\|_a \|v\|_a$$

sofort auf den Diskretisierungsfehler $\|u - u_h\|_a$ in der Energie-Norm übertragen lässt:

Lemma von Strang

Es gilt mit einer von h und λ unabhängigen Zahl c :

$$(2.23) \quad \|u - u_h\|_a \leq c \left(\inf_{v \in \mathbf{V}_h} \|u - v\|_a + \sup_{v \in \mathbf{V}_h} \frac{|a(u, v) - l_f(v)|}{\|v\|_a} \right).$$

Dabei ist $l_g(v) := (v, g)_0 + \int_{\Gamma_N} t \cdot v \, ds$ für $v \in \mathbf{V} + \mathbf{V}_h$, was bedeutet, dass für $v \in \mathbf{V}_h$ die Identität $l_f(v) = a_h(u_h, v)$ gilt. Der erste Summand von (2.23) zwischen den Klammern wird als *Approximations-*, der zweite als *Konsistenzfehler* bezeichnet. Es soll jetzt eine Abschätzung der Form

$$(2.24) \quad \|u - u_h\|_a \leq Ch$$

hergeleitet werden. Dazu werden nacheinander der Konsistenz- und der Approximationsfehler abgeschätzt. Zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers sei angenommen, dass die Lösung u sogar aus $\mathbf{H}^2(\Omega)$ ist. Wegen der diskreten Kornschen Ungleichung gilt

$$(2.25) \quad \frac{|a(u, v) - l_f(v)|}{\|v\|_a} \lesssim \frac{|a(u, v) - l_f(v)|}{\|v\|_1},$$

und es reicht, den rechten Term abzuschätzen. Man kann jetzt gut [Bra03, Kap. III] folgen. Nicht nur für $v \in \mathbf{V}_h$, sondern sogar für $v \in \mathbf{V}_h + \mathbf{V}$ ist

$$\begin{aligned} L_f(v) &:= a(u, v) - l_f(v) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\underbrace{(-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(u), v)}_{=f} \right)_{0,T} + (\boldsymbol{\sigma}(u) \mathbf{n}, v)_{0, \partial T} - (f, v)_0 - (t, v)_{0, \Gamma_N} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T \setminus \Gamma_N} \int_e (\boldsymbol{\sigma}(u) \mathbf{n}_e) \cdot v \, ds. \end{aligned}$$

Bezeichnet \bar{v}_e den Integral-Mittelwert von v auf der Kante e , so folgt, da jede innere Kante zweimal vorkommt und $\bar{v}_e = 0$ auf $\partial\Omega \setminus \Gamma_N$ gilt (bzw. $\partial\Omega \setminus \Gamma_N$ im Fall der „Lochscheibe“⁶ leer ist),

$$L_f(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T \setminus \Gamma_N} \int_e (\boldsymbol{\sigma}(u) \mathbf{n}_e) \cdot (v - \bar{v}_e) \, ds.$$

⁶Dabei wäre die Lochscheibe wegen der Voraussetzung, dass das Gebiet durch einen Polygonzug berandet ist, als eine Lochscheibe zu verstehen, bei der der Kreisrand durch einen Streckenzug angenähert worden ist.

Da nun aber $\int_e (v - \bar{v}_e) ds = 0$ ist, kann man ein beliebiges Vielfaches dieses Integrals abziehen und erhält mit $\zeta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Identität

$$L_f(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T \setminus \Gamma_N} \int_e \left((2\mu (\varepsilon(u) - \zeta) + \lambda \operatorname{div} u) \mathbf{n}_e \right) \cdot (v - \bar{v}_e) ds \quad .$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$|L_f(v)| \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T} I(v) \left(2\mu \left(\int_e |\varepsilon(u) - \zeta|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \lambda \left(\int_e |\operatorname{div} u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

mit der Vereinfachung $I(v) := \left(\int_e |v - \bar{v}_e|^2 ds \right)^{1/2}$. Bezeichnet \mathbf{I}_1 die Interpolation von $\mathbf{H}^2 \rightarrow \mathbb{P}_1^2$, also die Interpolation durch Vektor-Polynome vom Grad ≤ 1 , so erhält man durch $\zeta = \varepsilon(\mathbf{I}_1 u)$

$$(2.26) \quad |L_f(v)| \leq S_1 + S_2$$

mit

$$(2.27) \quad S_1 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T} 2\mu I(v) \left(\int_e |\varepsilon(u - \mathbf{I}_1 u)|^2 ds \right)^{1/2}$$

und

$$(2.28) \quad S_2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \in \partial T} \lambda I(v) \left(\int_e (\operatorname{div} u)^2 ds \right)^{1/2} \quad .$$

Man schätzt leicht bei S_1 das hintere Integral mit einer von h und λ unabhängigen Konstante C durch $C \int_e |\nabla(u - \mathbf{I}_1 u)|^2 ds$ nach oben ab. Jetzt kann man weiter wie in [Bra03] vorgehen; durch Anwendung des Spursatzes, des Bramble-Hilbert Lemmas und der Transformationsformel erhält man

$$(2.29) \quad |L_f(v)| \lesssim h (\|u\|_2 + \lambda \|\operatorname{div} u\|_1) \|v\|_1 \quad .$$

Dabei verwendet man zum Abschätzen des zweiten Integrals von S_2 nur den Spursatz und nicht das Bramble-Hilbert Lemma.

Es verbleibt, den Approximationsfehler $\inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \|u - v_h\|_a$ abzuschätzen, für den zunächst

$$(2.30) \quad \inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \|u - v_h\|_a \lesssim \inf_{v_h \in \mathbf{V}_h} \sqrt{2\mu \|u - v_h\|_1^2 + \lambda \|\operatorname{div} u - \operatorname{div} v_h\|_0^2}$$

gilt. Wie üblich ist eine geeignete Funktion v_h zu wählen. Es sei $v_h = v_h(u) \in \mathbf{V}_h$ ein Interpolant mit

$$(2.31) \quad \int_e (v_h \cdot \mathbf{n}) ds = \int_e (u \cdot \mathbf{n}) ds \quad .$$

Dann gilt $\forall T \in \mathcal{T}_h$

$$(2.32) \quad \int_T \operatorname{div} v_h dx = \int_{\partial T} (v_h \cdot \mathbf{n}) ds = \int_{\partial T} (u \cdot \mathbf{n}) ds = \int_T \operatorname{div} u dx \quad ,$$

und somit für jedes Dreieck

$$(2.33) \quad \operatorname{div} v_h|_T = \frac{1}{|T|} \int_T \operatorname{div} u \, dx \quad ,$$

d.h. $\operatorname{div} v_h = P_h^0 \operatorname{div} u$ ist die L_2 -Projektion von $\operatorname{div} u$ auf stückweise konstante Polynome. Mit dem Bramble-Hilbert-Lemma [Bra03, S. 72ff] erhält man

$$(2.34) \quad \|\operatorname{div} u - \operatorname{div} v_h\|_0 \lesssim h \|\operatorname{div} u\|_1 \quad .$$

Es verbleibt, $\|u - v_h\|_1^2$ abzuschätzen. Dazu sei $v_h = v_h(u)$ der durch (2.31) und die zusätzlichen Bedingungen

$$(2.35) \quad \int_e (v_h \cdot \mathbf{n}) \, ds = \int_e (u \cdot \mathbf{n}) \, ds$$

und

$$(2.36) \quad \int_e (v_h \cdot \mathbf{t}) \, ds = \int_e (u \cdot \mathbf{t}) \, ds$$

eindeutig bestimmte Interpolant aus dem diskreten MTW-Raum \mathbf{V}_h . Es gilt (man siehe [MTW02, S. 1617, Gleichung (4.5)])

$$(2.37) \quad \|u - v_h\|_1 \lesssim h |u|_2 \quad ,$$

und es ergibt sich mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung sofort die

Folgerung

Unter obigen Voraussetzungen erhält man mit einer von der Schrittweite h und vom Parameter $\lambda \geq 1$ unabhängigen Konstante C

$$(2.38) \quad \|u - u_h\|_a \leq C h (|u|_2 + \lambda \|\operatorname{div} u\|_1) \quad .$$

Bemerkung. Unter der schwächeren Voraussetzung $u \in \mathbf{H}^{1+\alpha}$ könnte man statt (2.38) noch

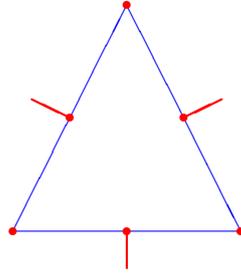
$$(2.39) \quad \|u - u_h\|_a \leq C h^\alpha (|u|_{1+\alpha} + \lambda \|\operatorname{div} u\|_\alpha)$$

erwarten.

2.3 Der Unterraum divergenzfreier Funktionen

Untersuchungen divergenzfreier Unterräume im Zusammenhang mit der Entwicklung von robusten Formulierungen oder Verfahren findet man z. B. auch in [BF91, VI.8], [Hip97], [AFW97] oder [Sch98]. In den Abschnitten 3.1.3 und 3.3 wird gezeigt, dass bei genauer Kenntnis des Unterraums der divergenzfreien Funktionen ein vom Parameter λ unabhängig konvergentes Iterationsverfahren vom Typ eines symmetrischen Gauß-Seidel-Verfahrens konstruiert werden kann. Aus diesem Grund erfolgt jetzt eine genaue Untersuchung dieses Unterraums.

Abbildung 2.4: Das modifizierte Morley Element



2.3.1 Das modifizierte Morley Element

Den Unterraum der divergenzfreen Funktionen kann man über das modifizierte Morley Element charakterisieren, das (vgl. [NTW01], S. 496) wie folgt definiert ist.

Definition. Sei $(T, W(T), \mathcal{N})$ definiert durch

$$(2.40) \quad W(T) := \left\{ w \in \mathbb{P}_4 \mid w|_e \in \mathbb{P}_2 \quad \forall e \in \mathcal{E}(T) \right\}$$

$$(2.41) \quad = \left\{ q + pb \mid q \in \mathbb{P}_2, \quad p \in \mathbb{P}_1 \right\},$$

wobei $T \subset \mathbb{R}^2$ wieder ein offenes Dreieck, b die Bubble-Funktion⁷ und $\mathcal{E}(T)$ die Menge der Kanten von T bezeichnet. Außerdem sei \mathbf{n}_e der äußere Normaleneinheitsvektor an die Kante e (bzgl. einer mathematisch positiven Orientierung der Kanten). Schließlich sei $s = s_e$ die Bogenlänge der Kante e . Die Menge der eine Funktion $w \in W(T)$ eindeutig bestimmenden Funktionale \mathcal{N} ist durch die folgenden 9 Funktionale gegeben:

$$(2.42) \quad w(x) \quad (x \in \mathcal{X}(T)),$$

$$(2.43) \quad w(m) \quad (m \in \mathcal{M}(T)),$$

$$(2.44) \quad \int_e (\mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_e) ds \quad (e \in \mathcal{E}(T)).$$

△

2.3.2 Der Raum W_h

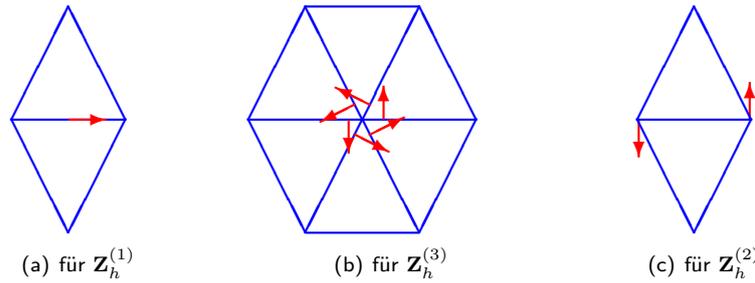
Wie bei \mathbf{V}_h wird jetzt zunächst eine – einfache, aber etwas ungenaue – umgangssprachliche Beschreibung des Raumes W_h gegeben.

Umgangssprachliche Beschreibung von W_h

Sei wieder $\mathcal{T} := \{T_h\}$ eine nicht entartete Familie von Zerlegungen von Ω , wobei h jeweils der maximale Durchmesser sei. Dann enthält der Raum $W_h := W_h(\mathcal{T})$ diejenigen Funktionen $w \in C^0(\Omega)$, die

⁷ $b = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ mit $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$ für Eckpunkte $x_j \in \mathcal{X}(T)$ und Polynome $\lambda_i \in \mathbb{P}_1$

Abbildung 2.5: Divergenzfreie Basisfunktionen



- eingeschränkt auf jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}_h$ aus $W(T)$ sind,
- für jede innere Kante $e \in \mathcal{E}_h^I$ genau die zwei Freiheitsgrade Funktionswert $w(m_e)$ und Integral des Gradienten $\int_e \mathbf{grad} w \cdot \mathbf{n}_e ds$ und
- für jeden inneren Eckpunkt $x \in \mathcal{X}_h^I$ als Freiheitsgrad den Funktionswert $w(x)$

besitzen (und alle diese Werte auf den Randkanten jeweils Null sind). Dieser Sachverhalt wird im Folgenden formal korrekt angegeben.

Definition. Mit den Definitionen der letzten Abschnitte ist der Raum $W_h := W_h(\mathcal{T})$ definiert durch

$$W_h := \left\{ w \in C^0(\Omega) \mid \begin{array}{l} \forall T \in \mathcal{T}_h : w|_T \in W(T), \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^R : w(m_e) = \int_e \nabla w|_{T_e} \cdot \mathbf{n}_e ds = 0, \\ \forall x \in \mathcal{X}_h^R : w(x) = 0, \\ \forall e \in \mathcal{E}_h^I : \int_e \nabla w|_{T_{e-}} \cdot \mathbf{n}_e ds = \int_e \nabla w|_{T_{e+}} \cdot \mathbf{n}_e ds \end{array} \right\}.$$

△

2.3.3 Einige divergenzfreie Unterräume

Den Bezeichnungen von Mardal, Tai und Winther (s. [MTW02], S. 1616) folgend sei Q_h der Raum der (bzgl. der Triangulation \mathcal{T}_h) stückweise konstanten, skalaren Funktionen. Dann folgt sofort $\text{div } \mathbf{V}_h \subset Q_h$. Sei weiter

$$(2.45) \quad \mathbf{Z}_h := \{ v \in \mathbf{V}_h : (\text{div } v, q)_0 = 0 \quad \forall q \in Q_h \}$$

der Unterraum der divergenzfreien Funktionen von \mathbf{V}_h . Es werden jetzt drei Teilräume $\mathbf{Z}_h^{(1)}$, $\mathbf{Z}_h^{(2)}$ und $\mathbf{Z}_h^{(3)}$ von \mathbf{Z}_h vorgestellt, über die sich \mathbf{Z}_h charakterisieren lässt. Der Einfachheit der Formulierung halber werden diese für das reine Verschiebeprobem vorgestellt.

Unterraum $\mathbf{Z}_h^{(1)}$ der Tangentialkomponenten

Eine Basis $\{\zeta_i^{(1)}\}$ des Unterraums $\mathbf{Z}_h^{(1)}$ ist gerade durch die nodalen Basisfunktionen $\zeta_i^{(1)} \in \mathbf{V}_h$ gegeben, für die auf genau einer (inneren) Kante e_i Integral der Tangentialkomponente $\int_{e_i} \zeta_i^{(1)} \cdot \mathbf{t}_{e_i} ds = 1$ gilt (s. Abb. 2.5(a) auf der vorherigen Seite). Es folgt $\dim \mathbf{Z}_h^{(1)} = \#\mathcal{E}_h^I$.

Unterraum $\mathbf{Z}_h^{(2)}$ der entgegengesetzten Normalkomponenten

Eine Basis $\{\zeta_i^{(2)}\}$ des Unterraums $\mathbf{Z}_h^{(2)}$ ist gegeben durch diejenigen Funktionen $\zeta_i^{(2)} \in \mathbf{V}_h$, die auf genau einer (inneren) Kante e_i die durch

$$\zeta_i^{(2)}(x_A) \cdot \mathbf{n}_{e_i} = 1 \quad \text{und} \quad \zeta_i^{(2)}(x_E) \cdot \mathbf{n}_{e_i} = -1$$

definierte Normalkomponente haben und bei denen alle anderen Freiheitsgrade Null sind (s. Abb. 2.5(c) auf der vorherigen Seite). Es folgt $\dim \mathbf{Z}_h^{(2)} = \#\mathcal{E}_h^I$.

Unterraum $\mathbf{Z}_h^{(3)}$ der Wirbel-Funktionen

Eine Basis $\{\zeta_i^{(3)}\}$ des Unterraums $\mathbf{Z}_h^{(3)}$ ist gegeben durch diejenigen Funktionen $\zeta_i^{(3)} \in \mathbf{V}_h$, die für genau einen inneren Eckpunkt x_i auf jeder angrenzenden Kante e jeweils

- am Endpunkt $x_E = x_i$ einer zum Punkt x_i hinführenden Kante e die Normalkomponente $\zeta_i^{(3)}(x_i) \cdot \mathbf{n}_{e_i} = 1/|e_i|$ besitzen,
- am Anfangspunkt $x_A = x_i$ einer von x_i wegführenden Kante e die Normalkomponente $\zeta_i^{(3)}(x_i) \cdot \mathbf{n}_{e_i} = -1/|e_i|$ besitzen und bei denen
- sonst alle Freiheitsgrade Null gesetzt sind (s. Abb. 2.5(b) auf der vorherigen Seite).

Es folgt $\dim \mathbf{Z}_h^{(3)} = \#\mathcal{X}_h^I$.

Bemerkung (Andere Randbedingungen). Bei anderen Randbedingungen ($\Gamma_N \neq \emptyset$) kommen für die zusätzlichen Randkanten noch die entsprechenden Funktionen hinzu.

2.3.4 Charakterisierung des divergenzfreien Unterraums

Für die hier gegebene Charakterisierung sei zusätzlich vorausgesetzt, dass das Gebiet einfach zusammenhängend ist, und der Rand in die zwei (jeweils wegzusammenhängenden) Teile Γ_N und Γ_D (und keine weiteren) unterteilt ist.

Für das reine Verschiebeprobem mit $\Gamma_N = \emptyset$ gilt (s. [MTW02], S. 1616)

$$(2.46) \quad \mathbf{Z}_h = \mathbf{curl} W_h \quad ,$$

wobei W_h der im vorigen Abschnitt eingeführte Raum (basierend auf dem modifizierten Morley Element) ist. Das heißt, dass der Unterraum der divergenzfreien Funktionen im Fall homogener Null-Randbedingungen auf dem gesamten Rand die Dimension $2\#\mathcal{E}_h^I + \#\mathcal{X}_h^I$ besitzt; deswegen sind in MTW-Räumen etwa drei Viertel der Funktionen divergenzfrei.

Man sieht leicht, dass die Funktionenmenge $\mathcal{B}_h := \{\zeta_i^{(j)}, j = 1, 2, 3\}$ eine Basis für den divergenzfreien Teilraum \mathbf{Z}_h bildet. Denn sie ist linear unabhängig, und es gilt

$$(2.47) \quad \dim [\mathcal{B}_h] = 2 \underbrace{(\#\mathcal{E}_h - \#\mathcal{E}_h^R)}_{=\#\mathcal{E}_h^I} + \underbrace{\#\mathcal{X}_h - \#\mathcal{E}_h^R}_{=\#\mathcal{X}_h^I} = \dim W_h = \dim \mathbf{curl} W_h \quad .$$

Für das letzte Gleichheitszeichen beachte man, dass Funktionen aus W_h wegen der Randbedingungen keinen konstanten Anteil besitzen können. Genauer gilt $W_h \subset H^1$; wenn die Dimension sinken würde, müsste es eine Funktion mit $\mathbf{curl} w_h = 0$ und $w_h \neq 0$ geben, was aber wegen der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung nicht sein kann. Es sei jetzt auf die Gleichung

$$(2.48) \quad \#\mathcal{T}_h = \#\mathcal{E}_h - \#\mathcal{X}_h + 1$$

hingewiesen. Es muss also im Fall homogener Nullrandbedingungen einen Unterraum divergenzbehafteter Funktionen der Dimension $\#\mathcal{T}_h - 1$ geben; denn die Dimension des gesamten Raumes ist $3(\#\mathcal{E}_h - \#\mathcal{E}_h^R)$.

Hat man nun genau eine freie Randkante, also genau $\#\mathcal{E}_h^R - 1$ Randkanten, auf denen die homogene Dirichlet-Randbedingung gilt, dann erhöht sich die Dimension des MTW-Raumes \mathbf{V}_h um 3. Die Dimension des divergenzfreien Unterraums wächst wie die von W_h um 2, und es gibt einen Unterraum divergenzbehafteter Funktionen mit Dimension $\#\mathcal{T}_h$. Denn diejenige Funktion, die am an die freie Kante angrenzenden Dreieck alle äußeren Normalkomponenten identisch 1 gesetzt hat, ist offensichtlich divergenzbehaftet und nicht durch die anderen Funktionen linear kombinierbar, da insbesondere die Normalkomponente auf der Randkante konstant 1 ist.

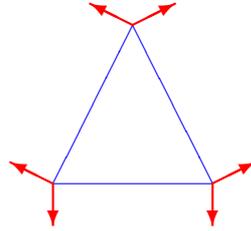
Für jede weitere freie Randkante erhöht sich die Dimension des MTW-Raumes \mathbf{V}_h um jeweils 3, die Dimension des divergenzfreien Unterraums offensichtlich auch (wie auch die von W_h). Bezeichnet $n < \#\mathcal{E}_h^R$ die Anzahl der Dirichlet-Randkanten, dann gilt also

$$(2.49) \quad \underbrace{2(\#\mathcal{E}_h - n) + (\#\mathcal{X}_h - n) - 1}_{\dim \mathbf{Z}_h} + \#\mathcal{T}_h = \underbrace{3(\#\mathcal{E} - n)}_{\dim \mathbf{V}_h} \quad .$$

Bei der letzten frei werdenden Kante ist dabei zu beachten, dass die Dimension durch Hinzufügen divergenzfreier Funktionen der oben beschriebenen Art nur um 2 wächst;⁸ sie wächst sogar um 3, da auch die konstanten Funktionen hinzukommen (man beachte, dass die Dimension von W_h um 4 wächst, jetzt aber nicht mehr die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung gilt und in diesem Fall die Dimension von $\mathbf{curl} W_h$ nur um 3 wächst).

Bemerkung (Andere Randbedingungen). Ist das Gebiet mehrfach zusammenhängend, oder gibt es mehrere wegzusammenhängende Randstücke mit Dirichlet-Randbedingungen, so müssen divergenzfreie Funktionen von einem anderen, „globalen“, Typ hinzugefügt werden, um eine Basis des divergenzfreien Unterraums zu erhalten (s. [BF91, Kap. VI.8]).

⁸Man beachte, dass die Summe aller divergenzfreien Basisfunktionen der oben beschriebenen Art (ohne die Tangentialkomponenten) konstant Null ist, wenn keine Randbedingungen existieren.

Abbildung 2.6: Divergenzbehaftete Funktion und das BDM -Element

2.3.5 Ein Unterraum divergenzbehafteter Funktionen

Es mögen die gleichen Bedingungen wie bei der Charakterisierung des divergenzfreien Unterraums gelten. Eine Basis des Unterraums divergenzbehafteter Funktionen bildet wegen der lokalen Trägereigenschaft die Menge derjenigen Funktionen, die auf jeweils genau einem Dreieck alle möglichen (z. B. äußeren) Normalkomponenten gleich 1 gesetzt haben, wobei für das reine Verschiebeprobem aus dieser Menge eine beliebige Funktion zu streichen ist (diese ist genau das Negative der Summe aller anderen). Man siehe auch Abbildung 2.6.

Die Menge \mathcal{B}_h kann man um die hier beschriebenen Basisfunktionen ergänzen, um eine Basis von \mathbf{V}_h zu bekommen; wenn diese Funktionenmenge nämlich nicht linear unabhängig wäre, dann müsste eine Linearkombination der divergenzbehafteten Funktionen divergenzfrei sein.

2.4 Der Brezzi-Douglas-Marini-Raum BDM_1

Der BDM_1 -Raum spielt eine Rolle für die Definition eines geeigneten Prolongations-Operators für den Mehrgitter-Algorithmus. Er ist auf gewisse Weise im MTW-Raum „enthalten“, ohne jedoch Teilraum zu sein.

2.4.1 Das BDM_1 Element

Der FE-Raum der $BDM_{1,h}$ -Funktionen wird über folgendes Element definiert (siehe auch [BF91], S. 113ff).

Definition. Sei (T, BDM_T, \mathcal{N}) definiert durch

$$(2.50) \quad BDM_T := \mathbb{P}_1^2(T) \quad ,$$

wobei $T \subset \mathbb{R}^2$ wieder ein offenes Dreieck bezeichnet.

Mit gleichen Bezeichnungen wie für die anderen Elemente ist die Menge der eine Funktion $v \in BDM_T$ eindeutig bestimmenden Funktionale \mathcal{N} durch die folgenden 6 Funktionale gegeben:

$$(2.51) \quad \int_e (v \cdot \mathbf{n}_e) \tau^k d\tau \quad (e \in \mathcal{E}(T), k = 0, 1) \quad .$$

Alternativ kann man natürlich auch die Normalkomponente am Anfangs- und Endpunkt einer jeden Kante als Freiheitsgrad vorgeben (vgl. MTW-Element). \triangle

2.4.2 Der Raum $BDM_{1,h}$

Es wird auf eine umgangssprachliche Beschreibung des Raumes verzichtet.

Definition. Der Finite Element-Raum zu einer Triangulierung ist wie gewöhnlich über das Finite Element definiert. \triangle

Bemerkung. Das heißt insbesondere, dass die $BDM_{1,h}$ -Funktionen im Gegensatz zu jeder MTW-Funktion $u \in \mathbf{V}_h$ keinerlei Stetigkeitsbedingungen an die Tangentialkomponente unterliegen. Es gilt also nicht $BDM_{1,h} \subset \mathbf{V}_h$, außer die Triangulierung besteht aus nur einem Dreieck (vgl. Abbildung 2.6).

Kapitel 3

Iterative Verfahren

Durch die im vorigen Abschnitt definierten FE-Räume erhielt man finite Probleme

$$(3.1) \quad \forall v \in \mathbf{V}_h : a_h(u_h, v) = (f, v)_0 \quad .$$

Das Folgende beschreibt kurz die bekannte *FE-Sicht* und *LGS-Sicht* der Probleme. Definiert man die linearen Operatoren

$$(3.2) \quad \hat{A}_h : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h^* \quad , \quad v \mapsto a_h(v, \cdot) \quad \text{und} \quad \hat{F}_h := (f, \cdot)_0 \in \mathbf{V}_h^* \quad ,$$

so ist das Finden von $u_h \in \mathbf{V}_h$ mit (3.1) äquivalent dazu, $u_h \in \mathbf{V}_h$ mit

$$(3.3) \quad \hat{A}_h u_h = \hat{F}_h$$

zu bestimmen. Der Rieszsche Darstellungssatz sichert einen isometrischen Isomorphismus $\Psi : \mathbf{V}_h^* \rightarrow \mathbf{V}_h$, so dass mit den Definitionen $A_h = \Psi \hat{A}_h$ und $F_h := \Psi \hat{F}_h$ (3.3) äquivalent durch

$$(3.4) \quad A_h u_h = F_h$$

ersetzt werden kann und noch zusätzlich $\|\hat{A}_h\|_{\mathbf{V}_h^*} = \|A_h\|_{\mathbf{V}_h}$ und $\|\hat{F}_h\|_{\mathbf{V}_h^*} = \|F_h\|_{\mathbf{V}_h}$ gilt. Durch Einführen einer Basis $\mathcal{B}_h = (b_{h,i})$, etwa der nodalen Basis, erhält man einen Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{V}_h$ (mit $n = \dim \mathbf{V}_h$)

$$(3.5) \quad v \mapsto \sum_{i=1}^n v_i b_{h,i} \quad ,$$

so dass es mit $\mathbf{A}_h := (a_h(b_{h,i}, b_{h,j}))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (beachte $\mathbf{A}_h = \Phi^{-1} A_h \Phi$) äquivalent ist, den Koordinatenvektor $\mathbf{u}^{(h)} \in \mathbb{R}^n$ von $u_h = \sum_{i=1}^n u_i b_{h,i}$ aus dem linearen Gleichungssystem

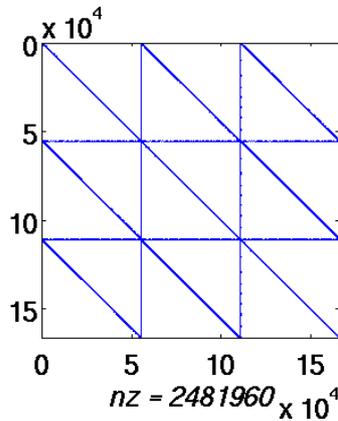
$$(3.6) \quad \mathbf{A}_h \mathbf{u}^{(h)} = \mathbf{f}^{(h)} := ((f, b_{h,1})_0, \dots, (f, b_{h,n})_0)^T$$

zu bestimmen. Dadurch erhält man schließlich auch eine „programmierbare Formulierung“ der Probleme. Die Systemmatrizen sind dünn besetzt, da die Basisfunktionen lokalen Träger besitzen. Dies bietet die Möglichkeit zu effizienten iterativen Lösungsverfahren (siehe Abbildung 3.1 auf der nächsten Seite). Zusätzlich sind die Matrizen wegen der diskreten Kornschen Ungleichung symmetrisch positiv definit.

Im ersten, einleitenden Abschnitt wird vorwiegend [Hac85] und [Hac91] gefolgt.

Abbildung 3.1: Dünn besetzte Systemmatrix

Dünn besetzte Systemmatrizen bieten die Möglichkeit für Iterationsverfahren, bei denen der Aufwand eines Schrittes nur *linear* von der Anzahl der Unbekannten abhängt.



3.1 Lineare Iterationsverfahren

Die meisten der folgenden Definitionen und einige Überlegungen für lineare Iterationsverfahren gelten auch im Komplexen. In den nächsten Abschnitten wird aber jeweils gleich mit Augenmerk auf die Diskretisierung des Elastizitätsproblems dieser Arbeit formuliert; insbesondere liegt der Fokus auf Verfahren zu symmetrisch positiv definiten Systemmatrix A .

3.1.1 Grundlagen und Bezeichnungen

Betrachtet wird ein lineares Gleichungssystem

$$(3.7) \quad A \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit „beliebig aber festem“ $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ und regulärer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Man beachte, dass die Matrizen A , die bei der Diskretisierung entstehen, symmetrisch und wegen der diskreten Kornschen Ungleichung sogar positiv definit sind. Ein iteratives Verfahren ϕ zur Lösung der Gleichung (3.7) ist eine Abbildung

$$(3.8) \quad \phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad ,$$

die sukzessive Näherungslösungen $\mathbf{u}_{m+1} = \phi(\mathbf{u}_m, \mathbf{f})$ für $m \in \mathbb{N}_0$ bei beliebig gewähltem Startvektor $\mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ liefert. Sie heißt *linear*, falls Matrizen $M, N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren, so dass

$$(3.9) \quad \phi(\mathbf{u}, \mathbf{f}) = M \mathbf{u} + N \mathbf{f}$$

gilt. Dabei heißt M *Iterationsmatrix* und M, N sind durch die Iterationsvorschrift eindeutig bestimmt. Man interessiert sich vor allem für zur Matrix A *konsistente, konvergente* Iterationsverfahren, wobei *konsistent* zu A heißt, dass für alle $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ die Lösung $A^{-1} \mathbf{f}$ Fixpunkt von $\phi(\cdot, \mathbf{f})$ ist. *Konvergent* bedeutet, dass für alle $\mathbf{f}, \mathbf{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ ein

vom Startwert x_0 unabhängiger Grenzwert $\hat{u} = \lim_{m \rightarrow \infty} \phi(u_{m-1}, f)$ existiert. Denn für solche Verfahren ist offensichtlich $\hat{u} = A^{-1} f$ die eindeutige Lösung von (3.7).

Des Weiteren ist bekannt, dass ein Iterationsverfahren genau dann konsistent zur Matrix A ist, wenn

$$(3.10) \quad M = I - N A$$

gilt, weswegen man ein solches auch als *Präkonditionierte Richardson-Iteration*

$$(3.11) \quad \phi_{Rich}(u, f) = u + N(f - A u)$$

verstehen kann, und genau dann konvergent ist, wenn für den Spektralradius $\rho(M)$ der Iterationsmatrix M

$$(3.12) \quad \rho(M) < 1$$

gilt. Für symmetrisch positiv definites A ist die A -Selbstadjungiertheit $A M = M^T A$ der Iterationsmatrix M (äquivalent dazu ist: $N^T = N$ ist symmetrisch) äquivalent zur Symmetrie von $A^{1/2} M A^{-1/2}$, und man erhält

$$\rho(M) = \rho(A^{1/2} M A^{-1/2}) = \|A^{1/2} M A^{-1/2}\|_2 = \|M\|_A \quad ,$$

weiter

$$\begin{aligned} \|u_{m+1} - \hat{u}\|_A &\leq \|M\|_A \|u_m - \hat{u}\|_A \\ &= \rho(M) \|u_m - \hat{u}\|_A \end{aligned}$$

und somit

$$\|u_m - \hat{u}\|_A \leq \rho(M)^m \|u_0 - \hat{u}\|_A \quad .$$

Bezüglich der Energie-Norm $\|\cdot\|_A$ ist die Konvergenzrate für A -selbstadjungierte Verfahren also direkt durch den Spektralradius der Iterationsmatrix gegeben.

Generieren einer A -selbstadjungierten Iteration. Aus einem Iterationsverfahren mit Vorkonditionierungsmatrix N zu symmetrisch positiv definitem A kann ein konsistentes Verfahren

$$(3.13) \quad \bar{M} = I - \bar{N} A = (I - N^T A)(I - N A) = (I - N A)^*(I - N A)$$

mit einer symmetrischen Matrix \bar{N} schematisch generiert werden (s. etwa [Xu92]). Ein Schritt der Iteration mit \bar{M} entspricht also dem Hintereinanderausführen von jeweils einer Iteration von zunächst dem durch N und dann dem durch N^T definierten Verfahren. Es gilt

$$(3.14) \quad \bar{N} = N + N^T - N^T A N$$

und wegen (3.13) nach Multiplikation mit A für beliebiges v

$$(3.15) \quad \|v\|_A^2 - \left\{ \begin{array}{l} \|(I - N A)v\|_A^2 \\ ((I - \bar{N} A)v, v)_A \end{array} \right\} = (\bar{N} A v, v)_A \quad .$$

Daraus schließt man durch einfaches Rechnen mit der unteren Variante, dass das neu generierte Verfahren *genau dann konvergiert*, wenn die symmetrische Matrix \tilde{N} positiv definit ist! Dies ist überdies für eine *reguläre* Matrix N , also für *Splitting-Methoden* (s. u.), äquivalent zur positiven Definitheit von

$$(3.16) \quad N^{-T} + N^{-1} - A \quad .$$

Jetzt kann man sich noch überlegen, dass aus der Konvergenz der generierten Variante die Konvergenz der ursprünglichen Verfahren folgt (ist N selber symmetrisch, so gilt auch die Umkehrung). Diese Überlegungen motivieren die nächste

Definition (Symmetrie, symmetrisierbar). Ein Iterationsverfahren heißt *symmetrisch* oder *symmetrisierbar*, falls N symmetrisch und positiv definit ist. \triangle

Jede symmetrisch positiv definite Matrix N kann als Vorkonditionierer für das (nicht zu den *linearen* Iterationsverfahren gehörende) *pcg-Verfahren* zur iterativen Lösung von (3.7) dienen. Dies wird in der Praxis auch getan: Man kann zeigen, dass, wenn man in der präkonditionierten Richardson-Iteration die Vorkonditionierungsmatrix $N = \tau \tilde{N}$ durch entsprechende Wahl von τ *optimal* skaliert, der Fehler $\|e_m\|_A$ der m -ten Iterierten in der Energie-Norm der Abschätzung (man siehe etwa [BZ00])

$$\|e_m\|_A \leq \left(\frac{\kappa(\mathbf{N}\mathbf{A}) - 1}{\kappa(\mathbf{N}\mathbf{A}) + 1} \right)^m \|e_0\|_A \quad ,$$

genügt. Dabei ist $\kappa(\mathbf{N}\mathbf{A})$ in (3.18) definiert (s. u.). Für das pcg-Verfahren kann man hingegen sogar

$$(3.17) \quad \|e_m\|_A \leq 2 \left(\frac{\sqrt{\kappa(\mathbf{N}\mathbf{A})} - 1}{\sqrt{\kappa(\mathbf{N}\mathbf{A})} + 1} \right)^m \|e_0\|_A$$

zeigen (für eine noch schärfere Abschätzung siehe z. B. [Hac91]). Es besteht der folgende

Zusammenhang mit Vorkonditionierung. Denkt man an die im vorigen Kapitel vorgestellten Diskretisierungen des Variationsproblems, so sollte der Spektralradius der Iterationsmatrizen $M = I - \mathbf{N}\mathbf{A}$ unabhängig vom Inkompressibilitätsparameter λ und von der Dimension des diskreten Lösungsraumes \mathbf{V}_h („unabhängig von h “) durch eine Konstante kleiner 1 beschränkt sein. Dies ist offensichtlich äquivalent dazu, dass es Konstanten $\gamma, \Gamma > 0$ gibt, so dass die Beträge der Eigenwerte von $\mathbf{N}\mathbf{A}$ in $(\gamma, \Gamma) \subset (0, 2)$ liegen. Es ergibt sich eine interessante Folgerung zur Präkonditionierung der Systemmatrizen \mathbf{A} :

Es sei $S = \text{spec}(\mathbf{N}\mathbf{A})$ das Spektrum von $\mathbf{N}\mathbf{A}$. Die Konditionszahlen

$$(3.18) \quad \kappa(\mathbf{N}\mathbf{A}) := \frac{\max_{\lambda \in S} \{|\lambda|\}}{\min_{\lambda \in S} \{|\lambda|\}} \leq \frac{\Gamma}{\gamma}$$

müssen unabhängig von den obigen Größen beschränkt sein. Man beachte aber, dass das Verfahren auch einen guten Vorkonditionierer bereitstellen kann, ohne selber zu konvergieren.

Für symmetrisch positiv definite Matrizen lässt sich das folgendermaßen umformulieren: Gesucht sind Konstanten γ, Γ mit

$$(3.19) \quad \gamma \mathbf{N}^{-1} \leq \mathbf{A} \leq \Gamma \mathbf{N}^{-1} \quad ,$$

wobei für spd-Matrizen \mathbf{A}, \mathbf{B} die Relation $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$ bedeutet, dass $\mathbf{B} - \mathbf{A}$ symmetrisch positiv semidefinit ist. Natürlich liefert die Wahl von $\mathbf{N} = \mathbf{A}^{-1}$ einen „optimalen“ Vorkonditionierer mit $\gamma = \Gamma = 1$; vielmehr geht es aber darum, die Operation $\mathbf{N}\mathbf{u}$ effizient bereitzustellen (effizient betrifft hier sowohl den Speicherplatzbedarf als auch den Berechnungsaufwand). Dies ist z. B. durch Mehrgitterverfahren zu erreichen.

Bemerkung (FE-Sicht). In der im einleitenden Abschnitt dieses Kapitels beschriebenen FE-Sicht heißt das, dass ein Präkonditionierer $C_h^{-1} := N_h : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$ gesucht wird, der für die präkonditionierte Gleichung

$$(3.20) \quad C_h^{-1} A_h u_h = C_h^{-1} F_h$$

ein lineares Iterationsverfahren

$$(3.21) \quad u_h^{k+1} = (I_h - C_h^{-1} A_h) u_h^k + C_h^{-1} F_h$$

bereitstellt.

Splitting-Methoden. Ist \mathbf{N} regulär und das Verfahren konsistent, dann nennt man das Verfahren auch *Splitting-Methode*, da nach (3.10) für die Iterationsmatrix

$$(3.22) \quad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{N} \mathbf{A} = -\mathbf{N} (\mathbf{A} - \mathbf{N}^{-1})$$

gilt und man das Verfahren als aus der Aufteilung $\mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1} + (\mathbf{A} - \mathbf{N}^{-1})$ gewonnen interpretieren kann. \triangle

Der Abschnitt 3.1.1 legt zur Konstruktion von linearen Iterationsverfahren für eine symmetrisch positiv definite Matrix \mathbf{A} folgendes Vorgehen nahe: Konstruiere eine Splitting-Methode über \mathbf{N}^{-1} derart, dass

$$\mathbf{N}^{-T} + \mathbf{N}^{-1} - \mathbf{A}$$

symmetrisch positiv definit ist. Dann ist der generierte Vorkonditionierer $\bar{\mathbf{N}}$ symmetrisch positiv definit, und die zu $\bar{\mathbf{N}}$, \mathbf{N} und \mathbf{N}^T gehörenden Verfahren sind konvergent.

Produkte linearer Iterationsverfahren. Aus [Hac91] entnimmt man auch das folgende Lemma:

Lemma (Produktiteration). Sind ϕ, ψ zwei lineare Iterationsverfahren mit den Iterationsmatrizen \mathbf{M}_ϕ und \mathbf{M}_ψ , dann gilt:

1. Mit ϕ und ψ ist auch die *Produktiteration* $\phi \circ \psi$ konsistent.
2. Die Iterationsmatrix $\mathbf{M}_{\phi \circ \psi}$ der Produktiteration hat die Form

$$\mathbf{M}_{\phi \circ \psi} = \mathbf{M}_\phi \mathbf{M}_\psi \quad .$$

3. Die Verfahren $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ besitzen die gleichen Konvergenz-Eigenschaften.

3.1.2 Beispiele für Iterationsverfahren

Dieser Abschnitt enthält einige „einfache“ Beispiele für lineare Iterationsverfahren; dabei bezieht sich „einfach“ einerseits auf die Konstruktion und Beschreibung der Verfahren, andererseits auch auf den verhältnismäßig geringen Berechnungsaufwand der Operation $N_h A_h$ (bzw. NA). Das Beispiel des Gauß-Seidel-Glätters eignet sich zudem gut zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen LGS- und FE-Sicht. Auf der Basis des Gauß-Seidel-Verfahrens werden später problemangepasste Vorkonditionierer entwickelt.

Gauß-Seidel- und Jacobi-Verfahren

Alle Diagonalelemente von A seien ungleich Null. Es bezeichne L resp. R den strikten unteren resp. oberen Dreiecksanteil und $D = D_A$ den Diagonalteil von A , so dass also $A = D + L + R$ gilt.

Gauß-Seidel-Verfahren. Ist $N = \omega(D + \omega L)^{-1}$ resp. $N = \omega(D + \omega R)^{-1}$, so heißt die entsprechende Splitting-Methode (relaxiertes) *Vorwärts-GS-Verfahren* (auch *SOR*, für $\omega = 1$ vGS) resp. *Rückwärts-GS-Verfahren* (auch *SOR*, für $\omega = 1$ rGS). Die Produktiterationen heißen *symmetrische GS-Verfahren* (sSOR, sGS) und sind (für $\omega \neq 0$) wegen

$$N^{-T} + N^{-1} - A = \omega^{-1} (D + \omega L + D + \omega R - \omega A) = \frac{(2 - \omega)}{\omega} D_A$$

für symmetrisch positiv definites A und $\omega \in (0, 2)$ tatsächlich symmetrische Verfahren; außerdem folgt somit für symmetrisch positiv definites A die Konvergenz all dieser Gauß-Seidel-Verfahren. Weiter ist für das *symmetrische* Verfahren -wie für alle symmetrisch generierten Verfahren- die Iterationsmatrix positiv semidefinit; d. h., eine mögliche obere Schranke in (3.19) ist $\Gamma = 1$.

Sei $\omega = 1$. Alternativ kann man das vGS-Verfahren als Produktiteration verstehen („zeilenweise“ Ausführung der Iterationsvorschrift). Dazu sei

$$(3.23) \quad P_i = \underbrace{e_i e_i^T A_{ii}^{-1} A}_{=: N_{GS,i}},$$

also die A -orthogonale Projektion auf den von e_i aufgespannten eindimensionalen Unterraum $\text{span}\{e_i\}$, falls A symmetrisch positiv definit ist. Offensichtlich gilt

$$(3.24) \quad M_{vGS} := (I - P_n) \dots (I - P_1),$$

$$(3.25) \quad M_{rGS} := (I - P_1) \dots (I - P_n).$$

Diese Sicht korrespondiert mit der FE-Sicht der Gauß-Seidel-Verfahren:

Gauß-Seidel-Verfahren (FE-Sicht). Für $i = 1, \dots, n$ bezeichne $\mathbf{V}_h^{(i)} = \text{span}\{b_{h,i}\}$ den von $b_{h,i}$ erzeugten eindimensionalen Unterraum $\mathbf{V}_h^{(i)} \subset \mathbf{V}_h$. Man kann zeigen, dass den Iterationsoperator $M_h := I - C_h^{-1} A_h$ der Gauß-Seidel-Iteration das Produkt

einzelner Iterationen $M_{h,i} := (I - P_i)$ ist, wobei $P_i : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h^{(i)}$ die a -orthogonale Projektion bezeichnet:

$$(3.26) \quad M_h = (I - P_n) \dots (I - P_1) \quad .$$

Dementsprechend definiert $M_h^* = (I - P_1) \dots (I - P_n)$ den Iterationsoperator des Rückwärts-GS-Verfahrens, und schließlich $M_{h,sGS} := M_h^* M_h$ und $M_h M_h^*$ die a -selbstadjungierten Iterationsmatrizen der sGS-Verfahren.

Beachtet man übrigens, dass $M_{h,sGS} =: I - N_h A_h$ ein konsistentes Verfahren definiert, so folgt aus der a -Selbstadjungiertheit wieder sofort die Symmetrie von N_h bzgl. des $(\cdot, \cdot)_0$ -Skalarproduktes.

Jacobi-Verfahren. Das durch $N = D^{-1}$ definierte Verfahren heißt Jacobi-Verfahren. Überprüfen der Bedingung (und Ausnutzen von $N = N^T$) liefert, dass für symmetrisch positiv definites A „alle“ Jacobi-Verfahren genau dann konvergieren, wenn $D - L - R$ positiv definit ist. (Insbesondere konvergieren sie also, wenn A das starke Zeilensummenkriterium erfüllt.)

Jacobi-Verfahren (FE-Sicht). Das Verfahren entspricht in der FE-Sicht dem A_h -selbstadjungierten Iterationsverfahren $M_{h,Jac} = M_h = I - \sum_{i=1}^n P_i = M_h^*$ (mit denselben P_i wie beim Gauß-Seidel Verfahren). Das Jacobi-Verfahren konvergiert seltener und i. d. R. langsamer als die GS-Verfahren, wofür eine einzelne Iteration weniger Berechnungsaufwand hat und parallel ausführbar ist. Auch für die Konvergenz-Theorie der Mehrgitterverfahren sind solche, *additive*, Verfahren hilfreich.

Block-Versionen. Wählt man statt n eindimensionaler Unterräume $\mathbf{V}_h^{(i)}$ m der Dimension n_i und bezeichnet $P_i : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h^{(i)}$ die entsprechenden a -orthogonalen Projektionen, so erhält man sog. „Block-Versionen“

$$(3.27) \quad M_{h,vGS} = (I - P_m) \dots (I - P_1) \quad \text{und} \quad M_{h,Jac} = I - \sum_{i=1}^m P_i$$

der Verfahren. In der Vorkonditionierungs-Matrix N der entsprechenden LGS-Sichten „sieht“ man „Blöcke“ am besten, wenn $\sum n_i = n$ gilt und man etwa die zu den Einheitsvektoren korrespondierenden Unterräume

$$(3.28) \quad \mathbf{V}_h^{(i)} = \Phi(\text{span}\{e_{s_{i-1}+1}, \dots, e_{s_i}\})$$

wählt, wozu noch die Zwischensumme $s_i = \sum_{j=1}^i n_j$ definiert sei. Man erhält dann „auf“ der Diagonalen Blöcke der Größe $n_i \times n_i$ ($i = 1, \dots, m$).

3.1.3 Der Gauß-Seidel-Glätter für parameterabhängige Probleme

Sei a eine auf einem Hilbertraum $(\hat{V}, (\cdot, \cdot)_V)$ symmetrisch positiv definite Bilinearform, V sei ein endlichdimensionaler Untervektorraum und $\Lambda : V \rightarrow W$ ein stetiger linearer Operator in den Hilbertraum $(W, (\cdot, \cdot)_W)$ mit nichttrivialem Kern $V_0 \subset V$. Auf W sei eine symmetrisch positiv definite Bilinearform b definiert. Es sei jetzt für $\lambda > 0$ die

Bilinearform $a_\lambda(u, v) = a(u, v) + \lambda b(\Lambda u, \Lambda v)$ definiert. Klar ist $b(\Lambda \cdot, \Lambda \cdot)$ auf V positiv semidefinit.

Es sei jetzt ϕ_1, \dots, ϕ_m eine Basis von V_0 . Diese sei durch $\phi_{m+1}, \dots, \phi_n$ zu einer Basis von V ergänzt. Alle Basisfunktionen seien von λ unabhängige Funktionen. Jetzt sei wieder $P_i : V \rightarrow \text{span}(\phi_i)$ jeweils die a_λ -orthogonale Projektion auf den Unterraum $\text{span}(\phi_i)$. Mit den bisher eingeführten Bezeichnungen ist

$$(3.29) \quad \bar{M}_\lambda = (I - \bar{N}A_\lambda) = (I - P_1) \dots (I - P_n) (I - P_n) \dots (I - P_1)$$

das symmetrisch generierte Punkt-Gauß-Seidel-Verfahren für den zu a_λ korrespondierenden Operator $A_\lambda : V \rightarrow V$.

Dann ist der entsprechende vorkonditionierte Operator $\bar{N}A_\lambda$ gleichmäßig symmetrisch positiv definit, d. h., es gibt ein $\gamma > 0$ mit $(\bar{N}_\lambda A_\lambda v, v)_V \geq \gamma(v, v)_V$.

Beweis. Der Beweis erfolgt bzgl. der kanonischen Basis im \mathbb{R}^n zu

$$\phi_1, \dots, \phi_m, \frac{\phi_{m+1}}{\sqrt{\lambda}}, \dots, \frac{\phi_n}{\sqrt{\lambda}},$$

die klar dieselben eindimensionalen Unterräume $V_i = \text{span}(\phi_i)$ der nicht skalierten Basis aufspannen. Für eine quadratische Matrix K sei $L(K)$ die untere Dreiecksmatrix von K mit Diagonale $D(K)$. Mit den Standard-Bezeichnungen lautet das Verfahren

$$(3.30) \quad \bar{M}_\lambda = (I - \bar{N}_\lambda A_\lambda) = (I - N_\lambda^T A_\lambda)(I - N_\lambda A_\lambda)$$

mit $N_\lambda = L(A_\lambda)^{-1}$. Prüfen der Standard-Bedingung (3.16) ergibt, dass

$$(3.31) \quad \bar{N} = L(A_\lambda)^{-T} D(A_\lambda) L(A_\lambda)^{-1}$$

symmetrisch positiv definit ist, was auch die multiplikative Schwarz Theorie sagt (etwa [Sch99]). Es reicht jetzt zu zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \bar{N}A_\lambda$ existiert und eine reguläre Matrix ist. Die Matrix A_λ besitzt offensichtlich die folgende Blockstruktur:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} K_1 & \sqrt{\lambda^{-1}} C^T \\ \sqrt{\lambda^{-1}} C & \lambda^{-1} K_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Mit

$$A = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

gilt auch $D(A_\lambda) \rightarrow D(A)$ und analoges für die unteren und oberen Dreiecksmatrizen, und zwar jeweils gegen reguläre Grenzwerte. Schließlich konvergieren somit auch die Inversen und das Produkt (3.31) gegen reguläre Matrizen. \square

Bemerkung. Dies besagt zunächst, dass in einer geeigneten Basis, die insbesondere eine *gesamte* Basis von V_0 enthalten muss, das „gewöhnliche“ Gauß-Seidel-Verfahren ein vom Parameter λ unabhängig konvergentes Iterationsverfahren ist.

Bemerkung. Rechnet man in einer *beliebigen* Basis, so könnte man denken, dass das Ergebnis nicht von Nutzen ist, da man evtl. zunächst versucht ist, den Koordinatenvektor der Iterierten $u^{(n)}$ in die geeignete Basis zu transformieren und man die erhaltende Korrektur dann zurücktransformieren müsste. Es sieht also so aus, als müsste man ein Gleichungssystem in der Größe der Anzahl der Unbekannten lösen.

Dem ist aber nicht so, denn der entsprechende Algorithmus ist äquivalent zu einem ohne Inversion der Basistransformationsmatrix.

Bemerkung. Sei $\tilde{B} = QBQ^T$ ein weiterer symmetrisch positiv *semidefiniter* Operator; dann kann in der Mitte der symmetrisch generierten Iteration (3.30) die A_λ -selbstadjungierte Iteration $(I - \tilde{B}A_\lambda)$ eingefügt werden, so dass mit $N_{alt} = \tilde{N}$

$$\begin{aligned} N_{neu} &= (I - M_{neu})A_\lambda^{-1} \\ &= N_{alt} + (I - N_\lambda^T A_\lambda) \tilde{B} (I - N_\lambda^T A_\lambda)^T \end{aligned}$$

gilt, und die entsprechend vorkonditionierte Matrix $N_{neu}A_\lambda$ klar von λ unabhängig symmetrisch positiv definit bleibt. Ist der Einschub selber symmetrisch generiert, so lässt sich dies induktiv beliebig oft wiederholen. Auch bleibt dann das Iterationsverfahren vom Parameter λ unabhängig konvergent. Ist der Einschub nicht symmetrisch generiert, lässt sich direkt *kein* Rückschluss mehr auf die Konvergenz der Iteration ziehen.

Plakatativ heißt das, dass, wenn die 1-Level-Glätter symmetrisch positiv definit sind, sowohl Zweigitterverfahren als induktiv auch V-Zyklen symmetrisch positiv definite Vorkonditionierer bereitstellen. Ist der Glätter auf dem feinsten Gitter entsprechend konstruiert, so ist die vorkonditionierte Systemmatrix unabhängig von λ positiv definit mit einer Konstante $\gamma = \gamma_h$, die natürlich noch von der Maschenweite des Gitters abhängig sein kann. Dieses –ohne Parameterabhängigkeit– klassische Resultat ([BZ00, THEOREM 7.5.]) ist also enthalten. Natürlich braucht unter diesen Voraussetzungen der V-Zyklus selber nicht zu konvergieren. Beim V-Zyklus hat man auf jedem Level k eine Iterationsmatrix der Form

$$(3.32) \quad (I - N_k^T A_k)(I - Q_{k-1}^T B_{k-1} Q_{k-1} A_k)(I - N_k A_k) \quad .$$

Es wäre also schön, wenn man die mittlere Iteration selber als zu A_k symmetrisch *generierte* Iteration verstehen könnte.

3.1.4 Dämpfungseigenschaft und die Kombination iterativer Verfahren

Es werde noch einmal ein *konvergentes* lineares Iterationsverfahren der Form (3.11) mit Iterationsmatrix $M = I - NA$ und symmetrisch positiv definitem Vorkonditionierer N sowie symmetrisch positiv definiten Systemmatrix A betrachtet.

Betrachtet man für $m \in \mathbb{N}_0$ die Fehler $e_m := u_m - \hat{u}$ der Iterierten u_m in einer Basis aus Eigenvektoren $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ zu Eigenwerten (μ_i) von M , so sieht man, dass Koordinaten zu *betragsskleinen* Eigenwerten von M sich schon bei *wenigen* Iterationen *stark* verringern (man sagt auch, diese *Komponenten* des Fehlers werden *stark gedämpft*), wohingegen die Fehlerkomponenten zu *betragsgroßen* Eigenwerten nur *schwach* gedämpft werden (*Dämpfungseigenschaft*).

Eine grundlegende Idee könnte sein, das Iterationsverfahren „geschickt“ (und für allgemeine Anwendung am besten auch *schematisch*) zu konstruieren. Betrachtet man den „einfachen“ Vorkonditionierer $c^{-1}\mathbf{I}$ mit $c > \lambda_{\max}(\mathbf{A})$ (wie etwa in [KA00, S. 243]), so lässt sich wegen der speziellen Form der Iterationsmatrix ein direkter Zusammenhang zu den Eigenwert-Eigenvektor-Paaren der Systemmatrix herstellen: die Fehlerkomponenten zu *großen* Eigenwerten λ_i von \mathbf{A} werden schon bei *wenigen* Iterationen *stark gedämpft*, wohingegen die Fehlerkomponenten zu *kleinen* Eigenwerten nur *schwach* gedämpft werden. Eine analoge Betrachtung lässt sich mit dem Jacobi-Verfahren für Matrizen mit konstanter Diagonale durchführen (s. [Bra03, Kap. V, § 1]); eine solche Matrix entsteht z. B. bei Diskretisierungen der Poisson-Gleichung.

Bemerkung. Das Richardson-Verfahren (s. o.) konvergiert auch schon mit dem Dämpfungsparameter $2\tilde{c} > \lambda_{\max}(\mathbf{A})$, aber dann werden auch Fehlerkomponenten zu Eigenwerten $\tilde{\lambda}_i \approx -1$ (der vorkonditionierten Matrix) kaum gedämpft; dasselbe Problem gibt es beim Jacobi-Verfahren. Alternativ zur oben beschriebenen Dämpfung jedes Schrittes mit dem Faktor einhalb könnte abwechselnd ein derart gedämpfter und ein ungedämpfter Schritt ausgeführt werden. An dieser Stelle sei abschließend zusätzlich bemerkt, dass, wenn man statt obiger Verfahren das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren verwendet, die eben beschriebene Problematik von Eigenwerten $\lambda_i \approx -1$ der Iterationsmatrix nicht vorkommen kann. Dies liegt daran, dass die Eigenwerte einer generierten symmetrischen Iteration nichtnegativ sind [s. (3.15)].

Glättungseigenschaft und Idee der Mehrgitterverfahren

Betrachtet man noch einmal das soeben angesprochene Modellproblem mit einer Systemmatrix \mathbf{A}_h zu einer Triangulierung \mathcal{T}_h mit FE-Raum V_h , die aus regulärer Verfeinerung einer Triangulierung \mathcal{T}_{2h} mit FE-Raum V_{2h} hervorgegangen ist, so lässt sich weiter feststellen, dass die zu den Eigenvektoren der kleinen Eigenwerte (von \mathbf{A}_h) gehörenden Funktionen des Fehlers „glatter“ sind: sie lassen sich gut durch Funktionen aus V_{2h} approximieren; deswegen nennt man die Dämpfungseigenschaft auch *Glättungseigenschaft* und spricht von *Glätten*.

Damit bietet sich für eine „geschickte, schematische“ Konstruktion eines Schrittes des (kombinierten) Iterationsverfahrens folgende Vorgehensweise an: Man führt zunächst einige wenige *Vorglättungsschritte* mit einem „einfachen“ Verfahren auf dem „feinen“ Gitter durch, stellt dann das Residuum auf dem gröberen Gitter dar, führt dort einige Glättungsschritte mit einem einfachen oder gleichartigen Verfahren aus (oder löst dort direkt), überträgt die Korrektur wieder auf das feinere Gitter, korrigiert dort die Näherungslösung und führt abschließend einige *Nachglättungsschritte* durch. Wendet man sofort auf dem gröberen Gitter einen direkten Löser an, so nennt man das kombinierte Verfahren wegen der Konstruktion *Zweigitterverfahren*; wendet man stattdessen jeweils vom feinsten bis zum größten Gitter dieselbe Technik an, so nennt man das Verfahren *Mehrgitterverfahren*. Bei den Mehrgitterverfahren unterscheidet man zusätzlich Varianten, die davon abhängen, wie viele Schritte des inneren Verfahrens (des Verfahrens zwischen Vor- und Nachglättungsschritten) ausgeführt werden; führt man einen Schritt durch, so spricht man von einem V-Zyklus, bei zwei Schritten von einem W-Zyklus. Für

weitere Varianten (F-Zyklus, cascadesches Mehrgitterverfahren oder die Verwendung einer *geschachtelten Iteration* zur Bestimmung eines Startwertes) siehe man [Bra03, Kap.V, § 3f]. Auf dem größten Gitter wird normalerweise ein direkter Löser und kein Näherungsverfahren verwendet.

Bemerkung. Da häufig eine multiplikative Variante des (einfachen) Iterationsverfahrens (z. B. Gauß-Seidel statt Jacobi) für das Mehrgitterverfahren verwendet werden soll, stört bei den obigen Motivationen natürlich, dass schlecht zu sehen ist, wie die Eigenwerte der entsprechenden Iterationsmatrix mit denen der Systemmatrix im Zusammenhang stehen. Andererseits ist bekannt, dass das Gauß-Seidel-Verfahren i. d. R. nicht schlechter konvergiert als das Jacobi-Verfahren.

Es sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass zwei Punkte für die Konstruktion eines effektiven Mehrgitterverfahrens von fundamentaler Bedeutung sind:

1. *Glättungseigenschaft.* Der Glätter auf dem feineren Gitter muss mit wenigen Iterationen dafür sorgen, dass der Fehler nur noch aus Komponenten besteht, für die 2. gilt.
2. *Approximationseigenschaft.* Zum Fehler nach wenigen Glättungsschritten existiert ein (*Restriktions-*)Operator, der diesen „gut“ auf das gröbere Gitter, und ein (*Prolongations-*)Operator, der die erhaltene Korrektur möglichst fehlerfrei auf das feinere Gitter überträgt.

3.2 Mehrgitterverfahren

Mehrgitterverfahren basieren einerseits auf der Glättungseigenschaft „einfacher“ Iterationsverfahren (s. voriger Abschnitt): Die Idee besteht darin, alle Komponenten des Residuums, die auf dem feinsten Gitter J der Größe $h = h(J)$ „leben“, durch relativ wenige Iterationen mit $K_J := (I - N_h A_h) =: (I - R_J A_J)$ relativ stark zu verringern; der Rest wird dann mit dem entsprechenden Iterationsoperator K_{J-1} zum nächstgrößeren Gitter ebenso behandelt. Für die Behandlung der Komponenten zum größten Gitter wird i. d. R. ein direkter Löser $R_1 = A_{h(1)}^{-1}$ benutzt. Damit ist selbstverständlich, dass ein wesentlicher Bestandteil der Konstruktion eines effizienten Mehrgitterverfahrens in der Konstruktion effizienter Glätter besteht. Ebenso ergibt sich die Frage, wie die Daten zwischen den verschiedenen Gittern ausgetauscht werden. Die Operatoren, die die Daten zu einem feineren Gitter in die eines gröberen umwandeln, heißen *Restriktions-*, die in umgekehrter Richtung fungierenden heißen *Prolongations-*Operatoren. Gerade im nichtgeschachtelten Fall

$$(3.33) \quad \mathbf{V}_{h(1)} \not\subset \mathbf{V}_{h(2)} \not\subset \dots \not\subset \mathbf{V}_{h(J)}$$

kommt der Konstruktion dieser Operatoren auch eine wesentliche Bedeutung zu; deren Güte, die so genannte Approximationseigenschaft, ist der andere wesentliche Bestandteil, auf dem die Konstruktion von Mehrgitterverfahren basiert (die Approximationseigenschaft wird auch durch die Regularität des zu Grunde liegenden Problems beeinflusst).

3.2.1 Bezeichnungen des Mehrgitterverfahrens

Es soll ein unserem Problem entsprechender Mehrgitter-Algorithmus formuliert werden. Dazu mögen die folgenden Definitionen gelten (s. [Bra93, S. 59ff]).

1. Gegeben seien für $k = 1, \dots, J$ die MTW-Räume $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{h(k)} =: \mathbf{V}_k$, die aus $\mathbf{V}_h = \mathbf{V}_{h(1)} = \mathbf{V}_1$ durch reguläre Verfeinerungen einer zugrunde liegenden Triangulierung $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{h(1)} =: \mathcal{T}_1$ der Größe $h(1) \leq 1$ hervorgegangen sind. Dabei wird die Voraussetzung $h(1) \leq 1$ nur für die Wohldefiniertheit der Bezeichnungseinfachung $\mathbf{V}_{h(k)} = \mathbf{V}_k$ benötigt.
2. Gegeben seien für $k = 1, \dots, J-1$ die $J-1$ linearen Operatoren $I_k : \mathbf{V}_{k-1} \rightarrow \mathbf{V}_k$, die so genannten *Prolongationsoperatoren*.
3. Die symmetrisch positiv definiten Formen $a_k := a_{h(k)}$ auf $\mathbf{V}_k \times \mathbf{V}_k$; dazu sei noch bemerkt, dass derselbe Term, der a_J definiert, auch alle anderen Formen definiert.
4. Mit $(\cdot, \cdot)_k$ sei jeweils das L_2^2 -Produkt auf $\mathbf{V}_k \times \mathbf{V}_k$ bezeichnet; auch hier kann $(\cdot, \cdot)_k = (\cdot, \cdot)$ für alle k geschrieben werden, da immer $\mathbf{V}_k \subset L_2^2$ gilt.
5. Die Operatoren $A_k : \mathbf{V}_k \rightarrow \mathbf{V}_k$ seien entsprechend der $A_{h(k)}$ (vgl. Anfang des Kapitels) definiert, d. h., es gilt

$$(3.34) \quad \forall v, w \in \mathbf{V}_k : \quad (A_k w, v) = a_k(w, v) \quad .$$

6. Die Restriktionsoperatoren $Q_{k-1} : \mathbf{V}_k \rightarrow \mathbf{V}_{k-1}$ seien die (\cdot, \cdot) -Adjungierten der I_k , bezeichnet mit $Q_{k-1} := I_k^t$, so dass also gelte

$$(3.35) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{k-1}, \forall w \in \mathbf{V}_k : \quad (Q_{k-1} w, v) = (w, I_k v) \quad .$$

Es seien auch noch die Operatoren $P_{k-1} : \mathbf{V}_k \rightarrow \mathbf{V}_{k-1}$ über

$$(3.36) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{k-1}, \forall w \in \mathbf{V}_k : \quad a_{k-1}(P_{k-1} w, v) = a_k(w, I_k v)$$

definiert.

7. Abschließend seien für jeden der Räume \mathbf{V}_k die Glätter (Vorkonditionierer linearer Iterationsverfahren) $N_{h(k)} = R_k : \mathbf{V}_k \rightarrow \mathbf{V}_k$ gegeben. Zur schreibtechnischen Vereinfachung sei hier gleich angenommen, dass $R_k = R_k^t$ symmetrisch ist; die Iterationsmatrix $I - R_k A_k$ des zum Glätter gehörenden Verfahrens sei also A_k -selbstadjungiert.

3.2.2 Definition Mehrgitterverfahren

Mit den obigen Bezeichnungen ist das zu den Gittern $1, \dots, J$ gehörende Mehrgitterverfahren $MGM_J = MGM_J(p, m_J)$ dasjenige lineare Iterationsverfahren mit Vorkonditionierer $N_J = B_J$, dessen Vorkonditionierer B_J (s. auch obige Vorüberlegungen) durch den folgenden *Mehrgitter-Algorithmus* rekursiv über lineare konsistente Iterationsverfahren mit Vorkonditionierer B_k ($k = 1, \dots, J-1$) definiert ist:

Mehrgitter-Algorithmus. Mit den Initialisierung

$$1. B_1 = A_1^{-1}$$

sei $B_J : \mathbf{V}_J \rightarrow \mathbf{V}_J$, $g_J \mapsto B_J g_J$ wie folgt rekursiv definiert: Für $k = 2, \dots, J$ und $g_k \in \mathbf{V}_k$ sei $B_k g_k$ zu gegebener Anzahl von Glättungsschritten $m_k \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$2. u_0 = 0 \in \mathbf{V}_k; q_0 = 0 \in \mathbf{V}_{k-1}.$$

3. **Vorglättung.** Für $l = 1, \dots, m_k$ sei $u_l \in \mathbf{V}_k$ definiert durch

$$(3.37) \quad u_l = u_{l-1} + R_k(g_k - A_k u_{l-1}) \quad .$$

4. **Grobgitter-Korrektur.** Im Fall $k > 2$ sei für $i = 1, \dots, p$ und im Fall $k = 2$ sei für $i = 1$ die lterierte $q_i \in \mathbf{V}_{k-1}$ definiert durch

$$(3.38) \quad q_i = q_{i-1} + B_{k-1} g_{k-1,i}$$

mit $g_{k-1,i} := [Q_{k-1}(g_k - A_k u_{m_k}) - A_{k-1} q_{i-1}]$; setze dann $v_{m_k} := u_{m_k} + I_k q_p$.

5. **Nachglättung.** Für $l = m_k + 1, \dots, 2m_k$ sei $v_l \in \mathbf{V}_k$ definiert durch

$$(3.39) \quad v_l = v_{l-1} + R_k(g_k - A_k v_{l-1}) \quad .$$

6. Abschließend sei $B_k g_k := v_{2m_k}$.

Bemerkungen. Der Mehrgitter-Algorithmus wird meistens mit $p = 1$ als *V-Zyklus* oder $p = 2$ als *W-Zyklus* verwendet. Bei der Grobgitter-Korrektur hat der Autor die übliche Formulierung der Mehrgitter-Algorithmen ([Bra03],[BZ00],[Sch99]) dahingehend abgeändert, dass für $k = 2$ und $B_1 = A_1^{-1}$

$$q_i = q_{i-1} + B_{k-1} g_{k-1,i} = q_{i-1} + A_1^{-1} g_{k-1,i} = A_1^{-1} Q_{k-1}(g_k - A_k x_{m_k})$$

nur einmal berechnet wird; i. d. R. dürfte das zweimalige „exakte“ Lösen auch in der Praxis unnötig sein. Dies ändert den Algorithmus theoretisch nicht; deswegen wird im weiteren Verlauf auch auf die den Lesefluss störende Fallunterscheidung $k > 2$, $k = 2$ verzichtet.

3.2.3 Einfache Eigenschaften.

Es ist klar, dass mit $K_k := I - R_k A_k$ wegen $R_k^t = R_k$ die a_k -Selbstadjungiertheit $K_k^* = K_k$ folgt und für die Iterationsoperatoren $M_k := I - B_k A_k$

$$(3.40) \quad M_k = K_k^{m_k} [I - I_k P_{k-1} + I_k M_{k-1}^p P_{k-1}] K_k^{m_k}$$

gilt. Wegen (3.36) gilt für a_{k-1} -selbstadjungiertes \tilde{M}_{k-1}

$$(3.41) \quad \begin{aligned} a_k(I_k \tilde{M}_{k-1} P_{k-1} u, v) &= a_{k-1}(\tilde{M}_{k-1} P_{k-1} u, P_{k-1} v) \\ &= a_{k-1}(P_{k-1} u, \tilde{M}_{k-1} P_{k-1} v) \end{aligned}$$

offensichtlich, dass $I_k \tilde{M}_{k-1} P_{k-1}$ a_k -selbstadjungiert ist, weswegen aus (3.40) induktiv sofort folgt, dass M_k a_k -selbstadjungiert bzw. dass B_k symmetrisch¹ ist. Da der Iterationsoperator M_k die Fortpflanzung eines Fehlers $e^{(m)} := u_{ex} - u^{(m)}$ beschreibt, sind Konstanten $0 \leq \delta_k < 1$ gesucht, so dass wegen

$$(3.42) \quad \|e^{(m+1)}\|_{a_k} = \|M_k e^{(m)}\|_{a_k} \leq \delta_k \|e^{(m)}\|_{a_k}$$

jede „Anwendung“ von M_k den Fehler verkleinert. Für einen selbstadjungierten Operator M_k ist bekannt, dass

$$(3.43) \quad \max_{v \in \mathbf{V}_k \setminus \{0\}} \frac{|a_k(M_k v, v)|}{a_k(v, v)} = \rho(M_k) = \|M_k\|_{a_k}$$

gilt, so dass man aus

$$(3.44) \quad |a_k(M_k v, v)| \leq \delta_k a_k(v, v)$$

für $v = e^{(m)}$ sofort die Ungleichung (3.42) erhält. Selbstverständlich ist die linke Seite der Ungleichung (3.44) nichtnegativ, falls M_k bzgl. a_k nicht nur selbstadjungiert, sondern sogar positiv semidefinit ist. Dass M_k positiv semidefinit ist, folgt z. B. aus

$$(A.9) \quad \forall u \in \mathbf{V}_{k-1} : a_k(I_k u, I_k u) \leq a_{k-1}(u, u) \quad .$$

Für den Beweis und äquivalente Bedingungen siehe man [Bra93, S. 62f]. Es sei hier noch einmal erwähnt, dass aus (3.44) auch folgt, dass der Vorkonditionierer B_k positiv definit ist, was eine einfache Rechnung zeigt. Dass B_k symmetrisch positiv definit ist, folgt aber auch schon, wenn es über den V-Zyklus mit einem Glätter R_k definiert wird, dessen Anwendung den Fehler mindestens so gut dämpft wie die des *schlechtesten* Richardson-Glätters mit Dämpfung der Form $R_{k, \tilde{\omega}} = \tilde{\omega} \lambda_k^{-1} I$ mit $\tilde{\omega} \in (0, 1)$. Dabei bezeichnet λ_k den größten Eigenwert von A_k . Bezeichnen $K_k := I - R_k A_k$ und $K_{k, \tilde{\omega}} := I - R_{k, \tilde{\omega}} A_k$ die Iterationsoperatoren der entsprechenden Glättungsprozesse, so lautet die Bedingung

$$(A.4) \quad \exists \tilde{\omega} \in (0, 1) : a(K_k, v, K_k v) \leq a(K_{k, \tilde{\omega}}, v, K_{k, \tilde{\omega}} v) \quad ;$$

dazu (und für äquivalente Bedingungen) siehe man ebenfalls [Bra93, (A.4)]. Eine weitere Bedingung für alle Aussagen über Konvergenz der Mehrgitterverfahren und Eignung von B_k als Vorkonditionierer sind die Bedingungen

$$(A.10) \quad \exists \alpha \in (0, 1], \exists C \in \mathbb{R} : |a_k((I - I_k P_{k-1})u, u)| \leq C \left(\frac{\|A_k u\|_k^2}{\lambda_k} \right)^\alpha a_k(u, u)^{1-\alpha}$$

und die Ungleichung (A.9), bzw. deren schwächere Form

$$(A.11) \quad \forall u \in \mathbf{V}_{k-1} : a_k(I_k u, I_k u) \leq 2 a_{k-1}(u, u)$$

an den Prolongationsoperator. Für einen alternativen Zugang zur Konvergenz von Mehrgitterverfahren (mit geschachtelten Räumen) siehe man etwa [Bra03]; auch dieser basiert aber auf Bedingungen an den Glätter, der *Glättungseigenschaft* und Bedingungen an den Restriktions-/Prolongationsoperator (*Approximationseigenschaft*).

¹ bzgl. des Skalarproduktes (\cdot, \cdot)

3.3 Problemspezifische Glättung und Prolongation

Nach den vorigen Überlegungen ist es wichtig, dass jeder Glätter (Vorkonditionierer) R_k den Fehler „gut“ glättet; möchte man, dass das Mehrgitterverfahren unabhängig vom Inkompressibilitätsparameter λ konvergiert (oder „schwächer“: es einen Vorkonditionierer bereitstellt, so dass für $\lambda \rightarrow \infty$ die Konditionszahl des vorkonditionierten Systems beschränkt bleibt), dann sollten insbesondere mit den Vorkonditionierern R_k solche Ergebnisse erzielt werden. Grundlegend für die Idee von Mehrgitterverfahren war, dass diejenigen Fehleranteile, die durch den Feingitter-Glätter nicht behandelt werden, gut auf dem größeren Gitter approximiert werden können. Betrachtet man die Systemmatrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_\varepsilon + \lambda \mathbf{A}_{\text{div}}$ bzw. das mit λ^{-1} skalierte Spektrum²

$$(3.45) \quad \lambda^{-1} \text{spec}(\mathbf{A}) = \text{spec}(\lambda^{-1} \mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{A}_{\text{div}}) \quad ,$$

so ergibt eine einfache Folgerung aus dem Satz von Courant-Fischer, dass diese Eigenwerte für $\lambda \rightarrow \infty$ gegen die Eigenwerte von \mathbf{A}_{div} konvergieren; dies ist in Anbetracht der Vorüberlegungen denkbar schlecht, da ja \mathbf{A}_{div} etwa 70% Null-Eigenwerte besitzt, zu denen überdies noch die Basis der divergenzfreien Funktionen bekannt ist, welche auf Grund ihrer Gestalt sicher „lokalen“ Charakter haben und somit *nicht* gut auf einem größeren Gitter darstellbar sind.

3.3.1 Gewöhnliche Verfahren: Symmetrisches GS-Verfahren

Für „einfache“ Verfahren, wie das Gauß-Seidel-, Jacobi- oder das (nur mit einer Konstante vorkonditionierte) Richardson-Verfahren, wird man nach den gerade getätigten Überlegungen erwarten, dass etwa 3/4 der Eigenwerte für $\lambda \rightarrow \infty$ „gegen Null geschoßen“ werden, was insbesondere zur Folge hat, dass die Konditionszahl der durch ein solches Verfahren vorkonditionierten Systemmatrix bestimmt gegen ∞ divergiert und das iterative Verfahren praktisch nicht konvergiert.

Für die Untersuchung solcher Verfahren wird hier stellvertretend das *symmetrische* Gauß-Seidel-Verfahren untersucht, da davon auszugehen ist, dass dieses –verglichen mit den anderen hier aufgeführten Verfahren– die beste Approximation an die Inverse und somit den besten Vorkonditionierer bereitstellt.

Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren als Vorkonditionierer für pcg

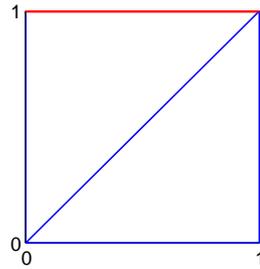
Die Tabelle 3.1 dokumentiert die Verwendung des symmetrischen Gauß-Seidel-Glätters R_k als Vorkonditionierer für das Präkonditionierte CG-Verfahren (pcg) am Beispiel des Quadrats [s. Kapitel 1 und 4 und Abbildung 3.2 auf der nachfolgenden Seite]. Dabei entspricht *eine* Anwendung des Vorkonditionierers *fünfzig* Glättungsschritten. Sie enthält die Anzahl der benötigten Iterationen, um eine Näherungslösung zu erhalten, deren Norm des relativen Residuums $\leq 10^{-6}$ ist.

²Diese Skalierung ändert nicht die Eigenwerte der durch einfache Verfahren wie das Jacobi- oder Gauß-Seidel-Verfahren vorkonditionierten Systemmatrix. (Bei dem mit $c \in (0, 1)$ durch $c/\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ vorkonditionierten Richardson Verfahren auch nicht.)

Tabelle 3.1: Anzahl der Iterationen, pcg mit sGS als Vorkonditionierer

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$	$\lambda = 10^7$	$\lambda = 10^8$
1	42	8	29	32	37	41	48
2	156	14	101	118	130	148	169
3	600	26	222	275	317	370	(428)

Abbildung 3.2: Einfache Triangulierung des Quadrats



Dabei bedeutet (428) bei Level 3 und $\lambda = 10^8$, dass die vorgegebene Reduktion nicht erreicht wurde, weil die Methode stagnierte. Betrachtet man die Eigenwerte der mit dem sGS-Vorkonditionierer vorkonditionierten Matrix für dieses Beispiel, so erhält man die Ergebnisse aus Tabelle 3.2.

Tabelle 3.2: Gerundete Eigenwerte μ_i der Systemmatrix mit sGS-Vorkonditionierer

λ	μ_1	...	μ_6	μ_7				μ_{12}
0	1.1e-02	...	4.8e-01	0.61	0.77	1.0	1	1
10^3	1.5e-04	...	1.4e-02	0.79	0.96	1.0	1.0	1
10^6	1.5e-07	...	1.4e-05	0.79	0.96	1.0	1	1
10^9	1.5e-10	...	1.4e-08	0.79	0.96	1	1	1

Man beachte noch, dass für dieses Beispiel \mathbf{A}_{div} genau *zehn* Null-Eigenwerte hat, und zwar für folgende Funktionen: Je eine mit entgegengesetzten Normalkomponenten und eine mit Tangentialkomponente für jede der vier „freien“ unteren Kanten, und weiter je eine wirbelartige für die unteren Eckpunkte. Also erwartet man evtl. nach den Vorüberlegungen, dass für $\lambda \rightarrow \infty$ auch *zehn* Eigenwerte der (mit einem „einfachen“ Verfahren) vorkonditionierten Systemmatrix gegen Null konvergieren. Dies tun aber offensichtlich nur *sechs*.

Fazit. Offensichtlich ist das Verfahren so nicht verwendbar. Es weist aber durchaus einen Weg zur Konstruktion eines problemangepassten Verfahrens. Auf Grund der Wahl der nodalen Basis werden nämlich vom sGS-Verfahren auch diejenigen (divergenzfreien) Fehleranteile speziell behandelt, die nur aus Tangentialkomponenten bestehen - dies sind genau *vier*. Die Beobachtungen legen nahe, dass ein problemangepasstes Verfahren *alle* Basisfunktionen des divergenzfreien Unterraums speziell behandeln muss.

3.3.2 Problemangepasste Glätter

Hiptmair (s. [Hip97]) und Arnold, Falk und Winther (s. [AFW97]) schlagen Glätter vor, bei denen die divergenzfreien Anteile des Fehlers zusätzlich gesondert geglättet werden; das ist nach den bisherigen Betrachtungen unmittelbar einsichtig.

Im Abschnitt 2.3.3 wurde gezeigt, dass für eine Triangulierung, deren Dirichlet-Rand Γ_D eine nichtleere und wegzusammenhängende Vereinigung von Randkanten der Triangulierung ist, der Unterraum \mathbf{Z}_h der divergenzfreien Funktionen als

$$(3.46) \quad \mathbf{Z}_h = \mathbf{Z}_h^{(1)} + \mathbf{Z}_h^{(2)} + \mathbf{Z}_h^{(3)}$$

geschrieben werden kann, oder –noch einmal anders– die dort definierten Funktionen $\zeta_i^{(j)} \in \mathbf{Z}_h^{(j)}$ in diesem Fall eine Basis

$$(3.47) \quad \mathcal{B}_h := \left\{ \zeta_i^{(j)}, j = 1, 2, 3, i = 1, \dots, n_j \right\}$$

(und im Falle $\Gamma_D = \emptyset$ noch ein Erzeugendensystem) von \mathbf{Z}_h bilden. Arnold, Falk und Winther schlagen für eine a_h ähnliche Bilinearform einen (Block-)Glätter vor, der sukzessive *alle* „lokalen“ Fehleranteile eliminiert: Für jeden „freien“ Punkt³ \mathbf{x} wird die Menge $\Omega_{\mathbf{x}}$ der den Punkt \mathbf{x} direkt umgebenden Dreiecke gebildet; zu $\Omega_{\mathbf{x}} \setminus \partial\Omega_{\mathbf{x}}$ gehört eine Menge von Basisfunktionen $\mathcal{B}_{\mathbf{x}}$, die den zum Punkt \mathbf{x} gehörenden Unterraum $\mathbf{V}_{\mathbf{x}} := \text{span } \mathcal{B}_{\mathbf{x}}$ aufspannen. (Wenn es –wie bei den MTW-Räumen– nur Kanten-assozierte Basisfunktionen gibt, hätte $\mathbf{V}_{\mathbf{x}}$ auch über die Menge der von \mathbf{x} ausgehenden Kanten definiert werden können.) Bezeichnet $u_{\mathbf{x}}$ die aus

$$(3.48) \quad \forall v \in \mathbf{V}_{\mathbf{x}} : \quad a_h(u_{\mathbf{x}}, v) = (f, v)$$

erhaltene Korrektur, so ist klar, dass insbesondere

$$(3.49) \quad a_h(u_{\mathbf{x}}, \zeta_i^{(j)}) = (f, \zeta_i^{(j)})$$

für alle zum Punkt \mathbf{x} und von ihm ausgehenden Kanten gehörenden Basisfunktionen $\zeta_i^{(j)} \in \mathbf{Z}_h$ gilt. Somit werden insbesondere alle divergenzfreien Fehleranteile behandelt. Es soll allerdings zunächst eine Version betrachtet werden, die nur eindimensionale Unterräume verwendet (s. [Hip97]).

Gauß-Seidel Glättung im Unterraum der divergenzfreien Funktionen

Definition. Seien $b_1, \dots, b_{m(h)}$ und $b_{m(h)+1} = \zeta_1^{(1)}, \dots, b_{n(h)} = \zeta_{n(h)}^{(1)}$ die nodalen Basisfunktionen des MTW-Raums \mathbf{V}_h und weiter die eindimensionalen Unterräume $\mathbf{V}_{1,i} := \text{span}\{b_i\}$ definiert; weiter seien für jede Funktion $\zeta_i^{(2)} \in \mathbf{Z}_h^{(2)}$ die eindimensionalen Unterräume $\mathbf{V}_{2,i} := \text{span}\{\zeta_i^{(2)}\}$ und für *jeden* Punkt \mathbf{x}_i die eindimensionalen Unterräume $\mathbf{V}_{3,i} := \text{span}\{\zeta_{\mathbf{x}_i}\}$ der wirbelartigen Funktion $\zeta_{\mathbf{x}_i}$ definiert; dabei wird für einen beliebigen Punkt die Funktion $\zeta_{\mathbf{x}_i}$ als entsprechend gewichtete Summe (s. voriges Kapitel) der an den Punkt angrenzenden Basisfunktionen gebildet (wobei o.B.d.A. für die divergenzfreien dieser Art $\zeta_i^{(3)} = \zeta_{\mathbf{x}_i} \in \mathbf{Z}_h^{(3)}$ gelte). Insbesondere gibt es also zu jeder Funktion der Basis des divergenzfreien Unterraums einen „zugehörigen“ eindimensionalen Unterraum.

³Ein Punkt, bei dem keine hin-/wegführende Randkante einer Neumann-Randbedingung genügt

Es mögen $P_{1,i}$, $P_{2,i}$ und $P_{3,i}$ die a_h -orthogonalen Projektionen auf die entsprechenden Unterräume bezeichnen. Dann ist der (symmetrische) Gauß-Seidel Glätter mit zusätzlicher Glättung (in den eindimensionalen Unterräumen $\mathbf{Z}_h^{(2)}$ und $\mathbf{Z}_h^{(3)}$), kurz sGS^+ , mit

$$(3.50) \quad M_{GS^+,h} := \prod(I_h - P_{3,i}) \cdot \prod(I_h - P_{2,i}) \prod(I_h - P_{1,i})$$

über den Iterationsoperator

$$(3.51) \quad M_{sGS^+,h} := M_{GS^+,h}^* M_{GS^+,h}$$

definiert. Dazu sei noch bemerkt, dass die Produkte in einer beliebigen aber bestimmten Reihenfolge gebildet werden, von der das Ergebnis aber zumindest dahingehend unabhängig ist, dass der Spektralradius (und in diesem Sinne das Konvergenzverhalten) jeweils derselbe ist, so dass der Iterationsoperator entweder für jede oder für keine Reihenfolge ein konvergentes Iterationsverfahren liefert.

Symmetrie. Man kann sich leicht überlegen, dass dieser Glätter symmetrisch positiv definit ist, da „außen“ das symmetrische Gauß-Seidel Verfahren angewendet wird. Bemerkung: Es wird weiter unten noch eine Variante dieses Glätters gemäß den Überlegungen in Abschnitt 3.1.3 auf Seite 41 eingeführt.

Konvergenzverhalten. Tabelle 3.3 dokumentiert den Effekt der zusätzlichen derartigen Glättung, dass die *gesamte* Basis des divergenzfreien Unterraums speziell behandelt wird. Es ist deutlich zu sehen, dass die Eigenwerte der vorkonditionierten Matrix durch eine Konstante $c > 0$ nach unten beschränkt (und natürlich kleiner oder gleich 1) sind.

Tabelle 3.3: Gerundete Eigenwerte μ_i der Systemmatrix mit sGS^+ -Vorkonditionierer

λ	μ_1	...	μ_6	μ_7	...	μ_{12}
0	0.017	...	0.57	0.84	...	1
10^3	0.028	...	0.82	0.92	...	1
10^9	0.015	...	0.83	0.92	...	1
10^{11}	0.015	...	0.83	0.92	...	1

Im Gegensatz zum naiven symmetrischen Gauß-Seidel Vorkonditionierer ergibt sich unter gleichen Bedingungen [s. dort] für den problemangepassten Glätter (hier: *eine* Anwendung des Vorkonditionierers entspricht *zehn* Glättungsschritten) die Tabelle 3.4.

Tabelle 3.4: Anzahl der Iterationen, pcg mit angepasstem Vorkonditionierer

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$	$\lambda = 10^7$	$\lambda = 10^8$
1	42	11	12	12	12	12	12
2	156	25	29	29	29	29	29
3	600	54	72	73	73	73	74

Fazit. Die Tabelle legt nahe, dass der Glätter einen Vorkonditionierer bereitstellt, so dass die Konditionszahl der vorkonditionierten Matrix unabhängig von λ beschränkt bleibt.

Bemerkung. Wenn der Dirichlet-/Symmetrie-Rand statt aus einer aus $n > 1$ Komponenten wegzusammenhängender Randkanten besteht, dann sollten $n - 1$ divergenzfreie Basisfunktionen zusätzlich geglättet werden (vgl. [BF91, S. 270]). Sicherlich haben diese Funktionen „globalen“ Charakter, weswegen auf Grund der Idee des Mehrgitterverfahrens evtl. auf eine zusätzliche Behandlung solcher Funktionen auf dem feinen Gitter verzichtet werden kann (vgl. [Sch99]); es sei aber hier bemerkt, dass gerade im nichtgeschachtelten Fall die Gefahr besteht, dass der beim Übertragen der Grobgitterkorrektur auf das feine Gitter unvermeidbare Fehler selber wieder solche Komponenten besitzen könnte. Auch numerische Ergebnisse bestätigen, dass es ratsam ist, eine *gesamte* Basis zu glätten.

Arbeitsaufwand. Wegen der Konstruktion hängt der Berechnungsaufwand bei jeder Anwendung des Glätters *linear* von der Anzahl der Unbekannten ab (man beachte, dass die Anzahl der von einem Punkt ausgehenden Kanten wegen der Quasiuniformität der Familie von Triangulierungen \mathcal{T}_h durch eine Konstante η_{\max} unabhängig von h beschränkt ist).

Variante. Es sei noch die folgende „Variante“ eines Punkt-Gauß-Seidel-Glätters definiert: Es bezeichne n_0 die Dimension des divergenzfreien Unterraums. Weiter sei $P : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$ eine Basistransformation, wobei die ersten n_0 Basisfunktionen auf die divergenzfreie Basis abgebildet werden mögen. Die Variante ist das mit

$$N := PL_{P^T A P}^{-1} P^T$$

über die Iterationsmatrix

$$(3.52) \quad M = (I - N_{sGS}^T A)(I - N^T A)(I - NA)(I - N_{sGS} A)$$

symmetrisch generierte Verfahren, wobei für eine beliebige quadratische Matrix B die Matrix L_B die entsprechende untere Dreiecksmatrix bezeichne.

Block-Gauß-Seidel-Glättung im Unterraum divergenzfreier Funktionen

In Anlehnung an Arnold, Falk und Winther (s. o.) wird die Block-Version des soeben vorgestellten Glätters verwendet. Jede Funktion v , die vom sGS^+ -Glätter speziell behandelt wurde, ist selber eine nodale Basisfunktion (für $v \in \mathbf{V}_{1,i}$), liegt in einem zweidimensionalen Unterraum $\mathbf{V}_{2,i}^B$ (für $v \in \mathbf{V}_{2,i}$), oder (für die restlichen Funktionen) in einem bis zu η_{\max} -dimensionalen Unterraum $\mathbf{V}_{3,i}^B$, wobei für eine quasiuniforme Familie von Zerlegungen die Höchstzahl η_{\max} der von einem Dreiecks-Eckpunkt ausgehenden Kanten (äquivalent die Höchstzahl $\eta_{\max} - 1$ der Dreiecke) beschränkt ist.

Es werden jetzt sukzessive diese mehrdimensionalen Unterräume behandelt.

Definition. Es mögen $P_{1,i}$, $P_{2,i}$ und $P_{3,i}$ die a_h -orthogonalen Projektionen auf die Unterräume $\mathbf{V}_{1,i}^B = \mathbf{V}_{1,i}$, $\mathbf{V}_{2,i}^B$ und $\mathbf{V}_{3,i}^B$ bezeichnen. Dann ist der (symmetrische) Block-Gauß-Seidel Glätter mit zusätzlicher Glättung, kurz $sBGS^+$, mit

$$(3.53) \quad M_{BGS^+,h} := \prod(I_h - P_{3,i}) \cdot \prod(I_h - P_{2,i}) \prod(I_h - P_{1,i})$$

über den Iterationsoperator

$$(3.54) \quad M_{sBGS^+,h} := M_{BGS^+,h}^* M_{BGS^+,h}$$

definiert. (Wieder ist das Iterationsverfahren entweder für jede „beliebige aber feste“ Reihenfolge konvergent oder divergent.)

Symmetrie. Dass der Glätter zumindest symmetrisch positiv definit ist, ist aus Sicht der multiplikativen Schwarz Theorie klar (s. [Sch99]), aber auch sonst folgt es durch Prüfen der Standard-Bedingung sofort: Das Verfahren ist die geschachtelte Produktiteration

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_3 \circ \phi_5 \circ \dots \quad \dots \circ \phi_4 \circ \phi_2 \circ \phi_0$$

einzelner symmetrisch generierter Verfahren $\phi_{2i+1} \circ \phi_{2i}$. Die äußeren Iterationen ϕ_0, ϕ_1 ergeben (bei entsprechender Zusammenfassung der Faktoren zu $\mathbf{V}_{1,k}^B$) als $\phi_1 \circ \phi_0$ wieder das symmetrische Gauß-Seidel-Verfahren. Sind die inneren „zusammengehörenden“ Produkte symmetrisch positiv semidefinit, so ist das Verfahren konvergent. Prüfen der Standard-Bedingung für die inneren Blöcke $\bar{N}_i = \bar{N}_{j,i}$ ($j = 2, 3$) liefert

$$\bar{N}_i = \mathbf{P}_i^T \tilde{\mathbf{A}}_i^{-1} \mathbf{P}_i \quad , \quad \tilde{\mathbf{A}}_i := \mathbf{P}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_i^T$$

mit $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$ und $m_i = \dim(\mathbf{V}_{j,i}^B)$, so dass also die \bar{N}_i wegen der positiven Definitheit von \mathbf{A} positiv semidefinit sind.

Konvergenzverhalten. Im Gegensatz zum naiven symmetrischen Gauß-Seidel-Vorkonditionierer ergibt sich unter gleichen Bedingungen [s. dort] für den problemangepassten Glätter (hier: *eine* Anwendung des Vorkonditionierers entspricht *zehn* Glättungsschritten) die folgende Tabelle.

Tabelle 3.5: Anzahl der Iterationen, pcg mit angepasstem Block-Vorkonditionierer

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$	$\lambda = 10^7$	$\lambda = 10^8$
1	42	6	10	10	10	10	10
2	156	13	23	23	23	23	23
3	600	24	61	63	63	63	63

Die Verwendung des Glätters als Iterationsverfahren (nicht als Vorkonditionierer für das pcg-Verfahren, sondern für die Richardson-Iteration) wird (Genauigkeit: $\leq 10^{-3}$, sonst gleiche Bedingungen) in Tabelle 3.6 dokumentiert.

Tabelle 3.6: Anzahl der Iterationen, angepasster Glätter

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$	$\lambda = 10^7$	$\lambda = 10^8$
1	42	26	107	120	121	121	121
2	156	114	510	1069	1133	1139	1140

Fazit. Die Tabellen legen nahe, dass die spezielle Behandlung der divergenzfreien Funktion tatsächlich dazu führt, dass die Konditionszahl der vorkonditionierten Matrizen für große Werte von λ beschränkt bleibt und auch deren Spektralradien durch eine Konstante kleiner Eins beschränkt bleiben.

Da nur diejenigen hochfrequenten und divergenzfreien Fehleranteile geglättet werden, die auf dem jeweiligen Level darstellbar sind, wird der Vorkonditionierer mit steigender Anzahl der Verfeinerungen schlechter. Um dies zu vermeiden muss für den Mehrgitter-Algorithmus noch ein geeigneter Prolongationsoperator definiert werden.

Arbeitsaufwand. Der Glätter lässt sich bei kanonischer Basiswahl als Produktiteration mit einer von der Anzahl der Unbekannten unabhängigen Anzahl von Vorkonditionierern implementieren, die die *Permutation* einer unteren Block-Dreiecksmatrix einer *Permutation* der Systemmatrix \mathbf{A}_h sind. Somit hängt der Berechnungsaufwand einer Anwendung des Glätters klar linear von der Anzahl der Unbekannten ab (man beachte dazu auch wieder, dass die *Größe* der Blöcke unabhängig von der Anzahl der Unbekannten durch η_{\max} beschränkt ist).

3.3.3 Problemangepasste Prolongation

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, wie ein Prolongationsoperator zu definieren ist. Um einen Algorithmus zu erhalten, der „unabhängig“ vom Inkompessibilitätsparameter λ ist, muss man insbesondere darauf achten, dass der Fehler, den man durch die Prolongation macht, „unabhängig von λ klein bleibt“. Dazu sei zunächst bemerkt, dass die FE-Räume nicht geschachtelt sind, so dass man keine triviale Prolongation hat, die zudem noch exakt wäre.

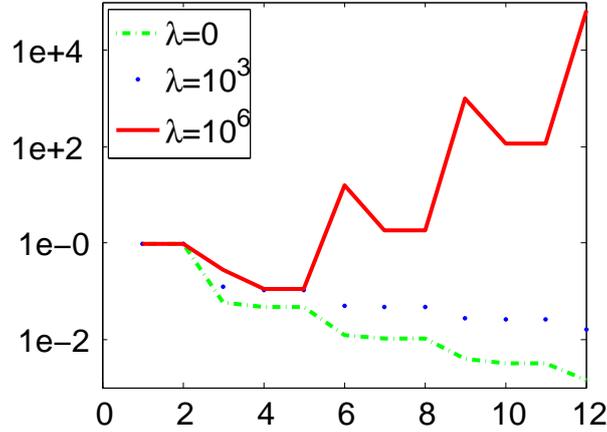
Eine erste Idee wäre die Verwendung eines Prolongationsoperators, der an den Freiheitsgraden, an denen die Werte nicht eindeutig sind, das arithmetische Mittel der vorhandenen Werte verwendet („AM-Prolongation“). Ein solcher erfüllt aber die obigen Anforderungen nicht: der Spektralradius der Iterationsmatrix des Mehrgitterverfahrens wächst mit λ und ist für große λ sogar größer als eins, so dass die Lösungsalgorithmen für große λ divergieren (s. Abbildung 3.3 auf der nachfolgenden Seite). Damit der Fehler, den man durch die Prolongation macht „unabhängig von λ “ ist, muss man insbesondere divergenzfreie Grob- auf divergenzfreie Feingitterfunktionen abbilden (s. auch [Sch98]): Es werden für die Beweise der Konvergenz von Mehrgitterverfahren gewöhnlich Ungleichungen (vgl. (A.9) und (A.11)) der Form

$$(3.55) \quad \forall u \in \mathbf{V}_{k-1} : \quad a_k(I_k u, I_k u) \lesssim a_{k-1}(u, u)$$

benötigt. Das bedeutet im Fall der Elastizität für jede divergenzfreie Funktion u_d

Abbildung 3.3: Mehrgitterverfahren mit AM-Prolongation

Die Abbildung zeigt den Fehler auf dem feinsten Gitter in der Energienorm während vier Schritten des Mehrgitterverfahrens, und zwar jeweils nach dem Vorglätten, nach der Prolongation auf das feinste Gitter und nach dem Nachglätten.



$$(3.56) \quad \forall u_d \in \mathbf{V}_{k-1} : \quad 2\mu \|I_k u_d\|_{\mathcal{E}}^2 + \lambda \|I_k u_d\|_{\text{div}}^2 \lesssim 2\mu \|u_d\|_{\mathcal{E}}^2 ,$$

was unabhängig von λ sicher nur bei Interpolationsoperatoren mit $\|I_k u_d\|_{\text{div}}^2 = 0$ erfüllt ist. Man kann mit

$$(3.57) \quad B_k A_k = \bar{R}_k A_k + (I - R_k^T A_k) I_k B_{k-1} A_{k-1} \underbrace{A_{k-1}^{-1} I_k^T A_k}_{P_{k-1}} (I - R_k A_k)$$

induktiv zeigen, dass die Voraussetzung beim (variablen) V-Zyklus hinreichend dafür ist, dass das Spektrum des vorkonditionierten Operators $B_k A_k$ durch positive Konstanten für $\lambda \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Der Operator $I_2 B_1 A_1 = I_2$ hängt nicht von λ ab. Die anderen Terme der rechten Seite sind in Abschnitt 3.1.3 untersucht worden, außer P_{k-1} . Mit einer zu dort analogen Beweistechnik zeigt man, dass der Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_{k-1}$ existiert, falls der Prolongationsoperator I_k divergenzfreie Grob- auf divergenzfreie Feingitterfunktionen abbildet.

Außerdem muss der Prolongationsoperator selbstverständlich die Grobgridfunktion in einem gewissen Sinne „gut“ darstellen - wählt man als Operator den Nulloperator, so werden natürlich auch die divergenzfreien Grobgridfunktionen auf die (divergenzfreie) Nullfunktion abgebildet. Dies heißt dann aber, dass de facto keine gröberen Gitter genutzt werden; man erzielt zwar bei „guten“ Glättern von λ unabhängige Ergebnisse, die aber mit zunehmender Verfeinerungstiefe schlechter werden (s. Tabellen im vorigen Abschnitt).

Prolongation und Brezzi-Douglas-Marini-Raum

Zur Definition eines Prolongationsoperators, der divergenzfreie Grob- auf divergenzfreie Feingitterfunktionen abbildet, können die Brezzi-Douglas-Marini-Räume $BDM_{1,h}$ (s. 2.4f) verwendet werden.

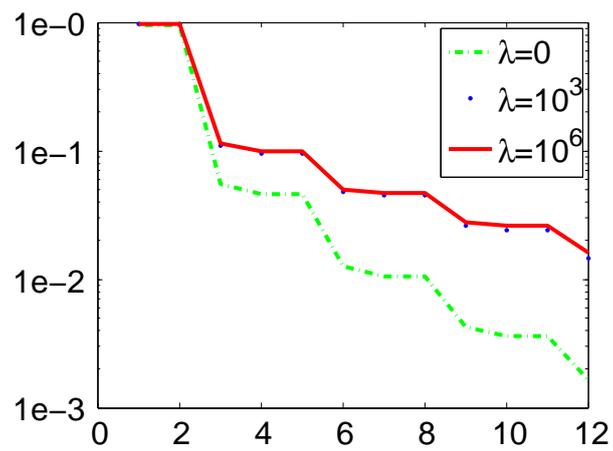
Zunächst sei aber vorweggenommen, dass die Werte der zu den Tangentialkomponenten gehörenden Basisfunktionen für diese Eigenschaft egal sind, da die entsprechenden Basisfunktionen alle divergenzfrei sind. Es liegt deswegen auch nahe, für *alle* Grobgitterbasisfunktionen die Werte *solcher* Feingitterbasisfunktionen über arithmetische Mittelbildung der durch die Grobgitterbasisfunktionen gegebenen Werte zu definieren.

Es verbleibt die Frage, wie die Werte derjenigen Feingitterbasisfunktionen zu definieren sind, die zu den Normalkomponenten gehören. Für die Grobgitterbasisfunktionen zu den Tangentialkomponenten, deren Normalkomponente zumindest auf dem gesamten Rand jedes Grobgitterdreiecks Null ist, ist ein einfacher Ansatz, die Feingitterbasisfunktionen zu den Normalkomponenten Null zu setzen. Die Grobgitterbasisfunktion $b_{i,h} \in \mathbf{V}_h$ zu den Normalkomponenten wird jetzt zunächst auf $w_{BDM_{1,h}} \in BDM_{1,h}$ abgebildet, wozu die Werte der Normalkomponenten übernommen werden. Selbstverständlich kann sich die Funktion $w_{BDM_{1,h}}$ auf dem Träger von $b_{i,h}$ um divergenzfreie Grobgitterbasisfunktionen zu Tangentialkomponenten unterscheiden. Dies können natürlich an einem Kantenmittelpunkt für die beiden angrenzenden Dreiecke verschiedene Grobgitterbasisfunktionen sein (es gilt eben nicht $BDM_{1,h} \subset \mathbf{V}_h$, für $BDM_{1,h}$ -Funktionen gibt es keine Stetigkeitsbedingung an die Tangentialkomponente). Die entsprechende Funktion $w_{BDM_{1,h}}$ hat aber dennoch klar die gleiche lineare Normalkomponente auf jedem Dreiecksrand und somit klar punktweise dieselbe konstante Divergenz an jedem inneren Punkt eines Dreiecks. Die Funktion $w_{BDM_{1,h}}$ lässt sich wegen $BDM_{1,h} \subset BDM_{1,h/2}$ exakt auf $w_{BDM_{1,h/2}}$ aus $BDM_{1,h/2}$ abbilden. Sie hat insbesondere auf jedem Feingitterrand identische Normalkomponenten und in jedem Feingitterdreieck punktweise dieselbe konstante Divergenz. Für jedes Feingitterdreieck kann man nun eine Funktion $Ib_{i,h} \in \mathbf{V}_{h/2}$ berechnen, die auf jedem Rand eines jeden Feingitterdreiecks dieselbe lineare Normalkomponente hat, und die eindeutig wird, wenn man für die Werte der Feingitterbasisfunktionen zu den Tangentialkomponenten etwa jeweils das Mittel der durch die Funktion $b_{i,h}$ gegebenen Werte verwendet. Die Funktion $Ib_{i,h} \in \mathbf{V}_{h/2}$ definiert die Werte der Feingitterbasisfunktionen für das Bild der Grobgitterbasisfunktion $b_{i,h} \in \mathbf{V}_h$. Dadurch, dass für jede Grobgitterbasisfunktion das Bild aus $\mathbf{V}_{h/2}$ definiert wurde, ist der Prolongationsoperator vollständig beschrieben. Um den Effekt zu sehen, vergleiche man die Abbildungen 3.3 auf der vorherigen Seite und 3.4 auf der nachfolgenden Seite.

Bemerkung zur Implementierung. Die Berechnung der $Ib_{i,h} \in \mathbf{V}_{h/2}$ ist wegen der Struktur der Räume in der „AM-Prolongation“ enthalten und einfach durch Nullsetzen einiger Terme zu implementieren.

Abbildung 3.4: Mehrgitterverfahren mit *BDM*-Prolongation

Die Abbildung zeigt den Fehler auf dem feinsten Gitter in der Energienorm während vier Schritten des Mehrgitterverfahrens, und zwar jeweils nach dem Vorglätten, nach der Prolongation auf das feinste Gitter und nach dem Nachglätten.



Kapitel 4

Beispiele und numerische Ergebnisse

4.1 Anwendungsbeispiele

4.1.1 Die Lochscheibe

Bei der Lochscheibe (s. Abbildung 1.1 auf Seite 10) handelt es sich um eine quadratische Membran eines isotropen elastischen Materials mit einem kreisförmigen Loch in der Mitte, deren obere und untere Randkante mit einer konstanten Spannung $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 4.5 \mathbf{n}$ belastet wird (vgl. z. B. [CS04]). Wegen der Symmetrie des Gebietes und der Randbedingungen genügt es, nur ein Viertel der Scheibe zu betrachten. Dieses Gebiet ist gegeben durch

$$\Omega_L = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 10, 0 < x_2 < 10, x_1^2 + x_2^2 > 1 \} .$$

Die Randbedingungen sind an der

- rechten Kante ($x_1 = 10, 0 < x_2 < 10$) und am Kreisviertel $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$,
- oberen Kante ($x_2 = 10, 0 < x_1 < 10$) $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 4.5 \mathbf{n} = (0, 4.5)^T$,
- unteren Kante ($x_2 = 0, 1 < x_1 < 10$) $(\sigma_{11}, \sigma_{12}) \cdot \mathbf{n} = 0, u_2 = 0$ und an der
- linken Kante ($x_1 = 0, 1 < x_2 < 10$) $(\sigma_{21}, \sigma_{22}) \cdot \mathbf{n} = 0, u_1 = 0$.

Die Bedingungen an der linken und unteren Kante ergeben sich aus der Symmetrisierung und werden *Symmetriebedingungen* genannt.

4.1.2 Das Quadrat

Betrachtet wird eine quadratische Membran (vgl. [CS03])

$$\Omega_Q = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \}$$

eines isotropen elastischen Materials, das an der Oberkante ($x_2 = 1$, $0 < x_1 < 1$) fest eingespannt ist ($u = 0$) und an der Unterkante mit einer konstanten Spannung $\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n}$ belastet wird. Das Gebiet ist also gegeben durch

$$\Omega_Q = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1 \} .$$

Die Bedingung für die linke Kante ($x_1 = 0$, $0 < x_2 < 1$) und für die rechte lautet $\sigma \cdot \mathbf{n} = 0$.

Variante des Quadrats

Mit der Variante des Quadrats soll das Quadrat bei folgender Abänderung verstanden werden: Die Dirichlet-Randbedingungen seien durch Symmetrie-Randbedingungen ersetzt („symmetrischer Zug“, wie bei der Lochplatte).

Bemerkung. Die Lösung u des entsprechenden Problems ist aus \mathbf{H}^2 , und es gilt

$$(4.1) \quad \|u\|_2 + \lambda \|\operatorname{div} u\|_1 \leq C ,$$

wobei die Konstante C nur von der Zug-Randbedingung und nicht vom Parameter λ abhängt ([BS02, S. 287]).

4.2 Numerische Ergebnisse mit direktem Löser

Ausgehend von einer Starttriangulierung \mathcal{T}_{h_0} , deren Dreiecke maximal den Durchmesser h_0 haben, besteht dann die betrachtete Familie \mathcal{T} von Zerlegungen aus Zerlegungen \mathcal{T}_{h_n} , die durch gleichmäßige Verfeinerung aus \mathcal{T}_{h_0} hervorgehen (und deren Dreiecke somit maximal den Durchmesser $h_n = (1/2)^n h_0$ haben).

Falls \mathbf{H}^2 -Regularität vorliegt, ist nach den Untersuchungen des Diskretisierungsfehlers in Abschnitt 2.2.3 damit zu rechnen, dass sich der Diskretisierungsfehler in etwa halbiert, wenn man eine gleichmäßige Verfeinerung durchführt, da ja

$$\|u - u_h\|_a \leq C h^\alpha$$

mit $\alpha = 1$ gilt. Zur näherungsweisen Bestimmung von α setzt man

$$\frac{\|u - u_{h_n}\|_a}{\|u - u_{h_{n+1}}\|_a} \approx \left(\frac{h_n}{h_{n+1}} \right)^\alpha$$

an, was in unserem Fall auf

$$(4.2) \quad \alpha \approx \log_2 \left(\frac{\|u - u_{h_n}\|_a}{\|u - u_{h_{n+1}}\|_a} \right)$$

führt. Für schwächere Regularität $u \in \mathbf{H}^{1+\beta}$ ($\beta < 1$) ist ein kleinerer Exponent $\alpha < 1$ zu erwarten.

Der Parameter μ wurde auf $\mu = 1$ normiert. Statt u wurde mit $u_{h,\lambda}^{FS}$ gerechnet, wobei $u_{h,\lambda}^{FS}$ eine Lösung aus einer Least-Squares-Formulierung eines gemischten Ansatzes mit

Tabelle 4.1: Diskretisierungsfehler in der Energienorm, Lochplatte

Level l	$\lambda = 10^0$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^3$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$
$l = 0$	1.606	1.253	1.178	1.170	1.169	1.169	1.169
$l = 1$	0.897	0.663	0.616	0.611	0.610	0.610	0.610
$l = 2$	0.467	0.338	0.313	0.310	0.310	0.310	0.310
$l = 3$	0.234	0.168	0.155	0.154	0.153	0.153	0.153
$l = 4$	0.117	0.083	0.076	0.076	0.076	0.076	0.076

Tabelle 4.2: Approximation des Exponenten aus (4.2), Lochplatte

Level l	$\lambda = 10^0$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^3$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$
$l = 0$	0.8	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9	0.9
$l = 1$	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$l = 2$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$l = 3$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Fortin-Soulie-Elementen für die Verschiebung ist (s. [CKS05]), für die $\|u - u_{h,\lambda}^{FS}\|_a \leq C h^\alpha$ gilt, so dass aus der Ungleichung $\|u_{h,\lambda}^{FS} - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a \leq C h^\alpha$

$$(4.3) \quad \|u - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a \leq \|u - u_{h,\lambda}^{FS}\|_a + \|u_{h,\lambda}^{FS} - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a \leq C h^\alpha$$

folgt. Alle Integrale zur Berechnung von $\|u_{h,\lambda}^{FS} - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a \leq C h^\alpha$ wurden mit der Quadraturformel von ATKINSON mit genügend hohem Exaktheitsgrad (7 Punkte im Dreieck, Exaktheitsgrad 5) berechnet. Für die Berechnung von $\|u\|_0$ wird die Formel von GATERMANN [Gat88] verwendet (12 Punkte, Exaktheitsgrad 7). Sämtliche Berechnungen wurden mit MATLAB durchgeführt; insbesondere wurde $u_{h,\lambda}^{MTW}$ jeweils mit dem direkten Löser von MATLAB berechnet.

4.2.1 Die Lochscheibe

Nach [R00] erwartet man, dass das gestellte Problem auf der gesamten Lochscheibe \mathbf{H}^2 -regulär ist. Für jede Lösung \hat{u} gilt $\hat{u} \in \mathbf{H}^2$; klar gilt somit für jede Lösung $u = \hat{u}|_{\Omega_L}$ der symmetrisierten Problemstellung $u \in \mathbf{H}^2$, so dass dann ebenfalls \mathbf{H}^2 -Regularität vorliegt.

Die Tabelle 4.1 auf dieser Seite enthält die Werte

$$(4.4) \quad \|u_{h,\lambda}^{FS} - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a \quad (h = h_l, l = 0, \dots, 4, \lambda = 10^0, 10^1, \dots, 10^6) \quad ,$$

als Abschätzungen für den Diskretisierungsfehler. Die \mathbf{H}^2 -Regularität ist deutlich zu erkennen (Halbierung der Werte von einer Zeile l zur nächsten $l + 1$). Tabelle 4.2 enthält die zugehörigen Näherungen an den Exponenten α (s.o.).

4.2.2 Das Quadrat

Es ist zu erwarten, dass die Konvergenz für das Quadrat langsamer ist ([R00]); dies liegt zum einen an den „zu großen“ Winkeln (90 Grad) bei gleichzeitigem Sprung der

Tabelle 4.3: Diskretisierungsfehler in der Energienorm, Quadrat

Level l	$\lambda = 10^0$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^3$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$
$l = 0$	0.098	0.202	0.227	0.230	0.230	0.230	0.230
$l = 1$	0.062	0.124	0.138	0.140	0.140	0.140	0.140
$l = 2$	0.042	0.082	0.092	0.093	0.093	0.093	0.093
$l = 3$	0.027	0.054	0.060	0.060	0.061	0.061	0.061
$l = 4$	0.017	0.035	0.039	0.040	0.040	0.040	0.040
$l = 5$	0.011	0.023	0.026	0.026	0.026	0.026	0.026
$l = 6$	0.007	0.015	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017

Tabelle 4.4: Konvergenzraten in der Energienorm, Quadrat

Level l	$\lambda = 10^0$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^3$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$
$l = 0$	0.628	0.611	0.607	0.606	0.606	0.606	0.606
$l = 1$	0.675	0.668	0.666	0.665	0.665	0.665	0.665
$l = 2$	0.646	0.652	0.653	0.653	0.653	0.653	0.653
$l = 3$	0.636	0.653	0.657	0.657	0.658	0.658	0.658
$l = 4$	0.626	0.652	0.659	0.660	0.660	0.660	0.660
$l = 5$	0.617	0.652	0.660	0.661	0.661	0.661	0.661

Randbedingung von „fest eingespannt“ (oben) auf „spannungsfrei“ (links und rechts), zum anderen an der Kombination aus Winkelgröße und Sprung der Randbedingung von „spannungsfrei“ auf vorgegebene Randspannung $\neq 0$ (unten). In der Tabelle 4.3 sind die zugehörigen Werte für den Fehler $\|u_{h,\lambda}^{FS} - u_{h,\lambda}^{MTW}\|_a$ zu finden, und diese ergeben als Näherung für den Exponenten $\alpha \lesssim 0.6$. Zur Illustration der gerade in diesem Abschnitt beschriebenen Abhängigkeit von den Winkeln wurde die Berechnung auf einem Trapez mit kleineren Winkeln „oben“ (und größeren „unten“) wiederholt (s. Abb. 4.1). Die zugehörigen Approximationen für α liefern $\alpha \lesssim 0.84$ (vgl. Tab. 4.5 auf der nächsten Seite).

Abbildung 4.1: Trapezförmiges Pendant zum Quadrat

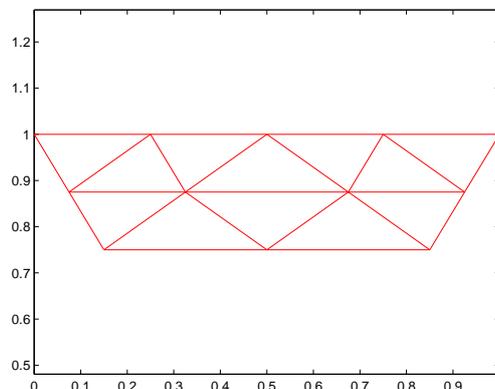


Tabelle 4.5: Konvergenzraten in der Energienorm

Level l	$\lambda = 10^0$	$\lambda = 10^1$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^3$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^5$	$\lambda = 10^6$
$l = 0$	0.706	0.528	0.505	0.503	0.502	0.502	0.502
$l = 1$	0.718	0.677	0.667	0.666	0.666	0.666	0.666
$l = 2$	0.642	0.657	0.661	0.662	0.662	0.662	0.662
$l = 3$	0.593	0.594	0.594	0.594	0.594	0.594	0.594
$l = 4$	0.566	0.566	0.568	0.569	0.569	0.569	0.569
$l = 5$	0.552	0.553	0.558	0.558	0.558	0.558	0.558

4.3 Numerische Ergebnisse mit iterativen Verfahren

Die in Kapitel 3 vorgestellten Glätter zusammen mit dem Prolongationsoperator sollen nun numerisch getestet werden. Die Konvergenzanalyse nach [Bra93] fußt auf dem Nachweis der Bedingung (A.4) an die Glätter, der „Regularitäts- und Approximations-Annahme“ (A.10), sowie der Bedingung (A.9) oder deren schwächerer Form (A.11) an die Prolongationsoperatoren. Die Bedingung (A.11) ist aber i. Allg. mit den vorgestellten Prolongationsoperatoren nicht erfüllt. D. h., dass diejenigen Konvergenzaussagen für den V- oder W-Zyklus als eigenständiges Iterationsverfahren nicht mehr anwendbar sind, die a priori unabhängig von der Anzahl der Glättungsschritte sind. Das gibt Anlass zur Frage, ob der Prolongationsoperator nicht entsprechend modifiziert werden kann.

Da der Glätter symmetrisch generiert und konvergent ist, sind die durch den V- oder variablen V-Zyklus bereitgestellten Vorkonditionierer symmetrisch positiv definit; weiter wurde gezeigt, dass diese Eigenschaft unabhängig vom Inkompressibilitätsparameter λ gilt. Deswegen ist zu erwarten, dass die Konditionszahl der durch den V- oder variablen V-Zyklus-Vorkonditionierer vorkonditionierten Systemmatrizen für $\lambda \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt. Würde (A.10) für eine Kombination aus Gebiet und Randbedingungen nachgewiesen werden, lieferte dafür die Mehrgittertheorie, dass die Konditionszahl für $h \rightarrow \infty$ beschränkt bliebe. Weiter wäre dann gesichert, dass der Spektralradius des W-Zyklus als Iterationsverfahren für genügend hohe Anzahl von Glättungsschritten pro Level durch eine Konstante $c < 1$ beschränkt bliebe.

Das bedeutet, dass bei den Mehrgitterverfahren als Iterationsverfahren, Konvergenz –wenn überhaupt– nur für „genügend hohe Anzahl von Glättungsschritten“ zu erwarten wäre. Ein Indiz, was das heißen könnte, liefert BRAESS [Bra03, S. 214]:

„Der Parameter ν steuert die Zahl der Glättungsschritte, im Standardfall ist $1 \leq \nu \leq 3$. [...] Bei komplexeren Problemen (dazu gehören nichtkonforme Elemente und gemischte Methoden) kann durchaus eine größere Anzahl von Glättungen erforderlich sein.“

Der nächste Unterabschnitt beschäftigt sich noch einmal kurz mit der „zusätzlichen“ Glättung einer divergenzfreien Funktion im Falle, dass der Dirichlet-Rand aus mehreren Wegzusammenhangskomponenten besteht. Der darauf folgende testet den V- und variablen V-Zyklus in seiner Eigenschaft als Vorkonditionierer für das pcg-Verfahren.

4.3.1 Glätter

Wie schon im Zuge des Vorstellens der Glätter geschrieben wurde, ist für die Entwicklung eines parameterunabhängigen 1-Level-Vorkonditionierers wichtig, dass bei nicht wegzusammenhängendem Symmetrie-/Dirichlet-Rand mit $k + 1$ Wegzusammenhangskomponenten nochmal k divergenzfreie Funktionen zusätzlich geglättet werden.

Lochscheibe

Das Beispiel der Lochscheibe eignet sich wegen der zwei Wegzusammenhangskomponenten gut zur Demonstration. Die Tabelle 4.6 auf dieser Seite zeigt in der oberen Hälfte die benötigten Iterationen des pcg-Verfahrens, um das relative Residuum um den Faktor 10^{-3} ohne Glättung der zusätzlichen divergenzfreien Funktion zu reduzieren.

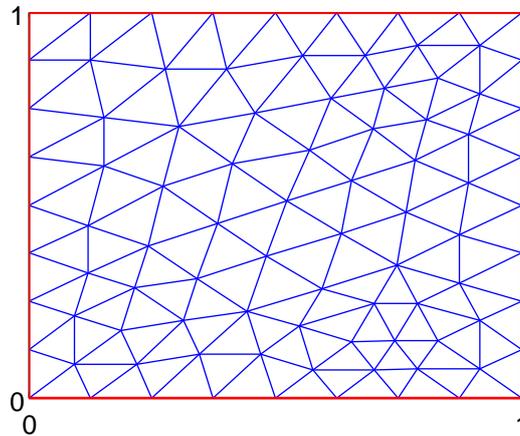
Tabelle 4.6: pcg-Verfahren mit 1-Level-Vorkonditionierer, Lochscheibe
Oben/unten: Ohne/mit Glättung der zusätzlichen divergenzfreien Funktion bei zweifach zusammenhängendem Rand.

Level	dofs	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^8$	$\lambda = 10^9$	$\lambda = 10^{10}$	$\lambda = 10^{11}$
0	241	29	36	48	52	57
1	950	80	93	120	153	(186)
0	241	27	28	28	28	28
1	950	76	79	79	79	80

Dabei bedeutet (186), dass das Verfahren die Reduktion nicht in der Maximalzahl von 500 Iterationen bewältigt hat (und dass die 186. Iterierte diejenige mit dem kleinsten relativen Residuum war). Die untere Hälfte zeigt die benötigten Iterationen mit zusätzlicher Glättung. Der Effekt ist gut zu sehen.

4.3.2 Das pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer

Jetzt soll das auf den entwickelnden Glättern und dem *BDM*-Prolongationsoperator basierende Mehrgitterverfahren in seiner Eigenschaft als Vorkonditionierer getestet werden. Der Parameter μ ist weiterhin auf $\mu = 1$ normiert. Die n -te Iterierte $\mathbf{u}^{(n)}$ des pcg-Verfahrens minimiert den Fehler $\|\mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{u}_{h,\lambda}\|_{A_{h,\lambda}}$ in der Energie-Norm in geschichteten Untervektorräumen, den Krylov-Räumen. Dabei bezeichnet $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{h,\lambda}^{MTW}$ den Koordinatenvektor der Lösung $u_{h,\lambda}^{MTW}$ (und $\mathbf{u}^{(n)}$ den einer Näherungslösung $u^{(n)}$). Da die Lösung i. Allg. nicht bekannt ist, wird für das pcg-Verfahren häufig als Abbruchkriterium eine Reduktion der Euklid-Norm des relativen Residuums $(\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{u}^{(n)})/\mathbf{f}$ um einen gewissen Faktor verwendet. Hier werden abermals die mit dem direkten Löser von MATLAB über einmalige Defekt-Korrektur berechneten Lösungen $\mathbf{u}_{h,\lambda}$ verwendet. Man beachte, dass zumindest für die Lochplatte und das Quadrat für diese im vorigen Abschnitt eine gewisse Güte gezeigt wurde. Als Abbruchkriterium wurde bei allen Berechnungen, ausgehend von Startvektor Null, die Reduktion des Fehlers der zweiten Iterierten in der Energie-Norm um einen Faktor von mindestens 10^{-3} verwendet.

Abbildung 4.2: Triangulierung des Quadrats nach *einer* Verfeinerung

(Das entspricht bei den gerechneten Problemen etwa einer Reduktion des Fehlers der Startlösung um den Faktor 10^{-5} .)

Das Quadrat, seine Variante und die Lochscheibe

Es wird zunächst der durch den V-Zyklus bereitgestellte Vorkonditionierer numerisch getestet.

Das Quadrat und die Variante. Das Quadrat selber und die angesprochene Variante unterscheiden sich hinsichtlich der Regularität: Die Variante ist (s. o.) \mathbf{H}^2 -regulär, wohingegen für das Quadrat ermittelt wurde, dass die Lösung $u = u_\lambda$ aus $\mathbf{H}^{1+\alpha}$ mit $\alpha \approx 0.6$ ist. Es wird deswegen mit dem „Vorzeigebispiel“ der Variante begonnen.

Variante des Quadrats. Es wurde der Punkt-Gauß-Seidel-Glätter (Variante, s. Definition (3.52) auf Seite 53) mit *einem* Glättungsschritt pro Aufruf, also *zwei* pro Level, verwendet. Die größte Zerlegung wurde durch `initmesh(geom, 'Hmax', 0.3)` von MATLAB erzeugt, wobei `geom` die entsprechende Geometrie-Datei des Quadrats bezeichnet (s. Abb. 4.2). Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.7 auf der nachfolgenden Seite zu sehen. Die Werte zeigen deutlich, dass die Anzahl der Iterationen unabhängig vom Inkompressibilitätsparameter λ beschränkt bleibt. Weiter bestärken sie die Vermutung, dass dies auch für die Abhängigkeit vom Level gilt.

Die Iterationszahlen bei Vorkonditionierung durch den *variablen* V-Zyklus sind in Tabelle 4.8 auf der nächsten Seite dokumentiert. Bei Wechsel auf das gröbere Gitter wurde die Anzahl der Glättungsschritte ausgehend von 1 jeweils verdoppelt.

Bei diesem Problem scheinen die Iterationszahlen auch bei Vorkonditionierung mit dem durch den V-Zyklus bereitgestellten Vorkonditionierer beschränkt zu bleiben.

Tabelle 4.7: pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante des Quadrats

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	664	8	8	9	9
2	2624	9	9	10	10
3	10432	9	10	11	11
4	41600	9	10	11	11
5	166144	9	10	11	11
6	664064	9	10	11	11

Tabelle 4.8: pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante des Quadrats

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	664	8	8	9	9
2	2624	8	9	9	9
3	10432	8	9	10	10
4	41600	8	9	9	9
5	166144	8	8	9	9
6	664064	8	8	9	9

Das Quadrat. Es wurde derselbe Glätter wie bei der Variante verwendet, ebenfalls mit *einem* Glättungsschritt. Auch wurde die größte Triangulierung mit demselben MATLAB-Befehl erzeugt. Die Ergebnisse befinden sich in Tabelle 4.9.

Tabelle 4.9: pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer auf dem Quadrat

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	672	7	9	10	10
2	2640	8	10	12	12
3	10464	9	12	14	14
4	41664	9	12	16	16
5	166272	10	13	17	17
6	664320	10	13	17	17

Es ist zu bemerken, dass für dieses nicht \mathbf{H}^2 -reguläre Problem wesentlich mehr Iterationen zur Reduktion des Fehlers benötigt werden; die Iterationszahlen sind unabhängig vom Parameter λ . Es ist interessant, den variablen V-Zyklus zu betrachten: Man siehe Tabelle 4.10 auf der nächsten Seite.

Bei dem Wechsel auf das gröbere Gitter wurde wieder die Anzahl der Glättungsschritte ausgehend von 1 jeweils verdoppelt. So wird auch weiterhin beim variablen V-Zyklus verfahren werden.

Die Lochscheibe. Zur Lochscheibe sei bemerkt, dass das Problem zwar \mathbf{H}^2 -regulär ist, das kreisförmige Randstück jedoch einige Probleme bereitet. Zunächst einmal besitzen die Gebiete der Triangulierungen einspringende Ecken, so dass ein auf diesen

Tabelle 4.10: pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer auf dem Quadrat

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	672	7	9	10	10
2	2640	8	10	11	11
3	10464	8	11	13	13
4	41664	8	11	12	12
5	166272	8	11	12	12
6	664320	8	11	12	12

Gebieten gestelltes Problem nicht \mathbf{H}^2 -regulär wäre. Weiter sei erwähnt, dass die Dreiecke zu den zum Kreisrand gehörenden Kanten nicht regulär verfeinert werden. Das bedeutet insbesondere, dass dort die Bedingung verletzt ist, dass bei der Prolongation divergenzfreie Grobgitter- auf divergenzfreie Feingitterfunktionen abgebildet werden sollen. Die zugehörigen Iterationszahlen befinden sich in Tabelle 4.11.

Tabelle 4.11: pcg-Verfahren mit V-Zyklus-Vorkonditionierer, Lochscheibe

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	950	9	11	11	11
2	3772	12	12	14	14
3	15032	14	15	18	18
4	60016	14	16	19	19
5	239840	14	16	20	20
6	958912	14	16	20	20

Jetzt ist natürlich wieder interessant zu sehen, wie sich die Vorkonditionierung mit dem durch den variablen V-Zyklus bereitgestellten Glätter auswirkt; denn erstens ist davon auszugehen, dass die angesprochenen Probleme bei feineren Diskretisierungen weniger ins Gewicht fallen und zweitens wird beim variablen V-Zyklus ja gerade auf den groben Gittern die Anzahl der Glättungsschritte erhöht: man siehe Tabelle 4.12.

Tabelle 4.12: pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Lochscheibe

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	950	9	11	11	11
2	3772	11	12	13	13
3	15032	12	13	15	16
4	60016	11	13	15	15
5	239840	11	12	14	14
6	958912	10	12	14	14

Abschließend wird hier noch einmal der variable V-Zyklus-Vorkonditionierer für eine Variante der Lochscheibe verwendet; die einzige Änderung besteht darin, dass das gekurvte Randstück der größten Triangulierung durch die entsprechende Verbindungsstrecke ersetzt worden ist. Die Iterationszahlen befinden sich in Tabelle 4.13 auf der nächsten Seite.

Tabelle 4.13: pcg-Verfahren mit vV-Zyklus-Vorkonditionierer, Variante der Lochscheibe

Level	dofs	$\lambda = 0$	$\lambda = 10^2$	$\lambda = 10^4$	$\lambda = 10^6$
1	950	9	10	11	11
2	3772	10	10	11	12
3	15032	10	10	11	11
4	60016	10	10	11	11
5	239840	10	10	11	11

Poissonzahl ν und Elastizitätsmodul E

Die Tabelle 4.14 zeigt Poisson-Zahl ν und Elastizitätsmodul E in Abhängigkeit des Lamé-Parameters λ für $\mu = 1$.

Tabelle 4.14: Poisson-Zahl ν und Elastizitätsmodul E

Die Tabelle zeigt Poisson-Zahl ν und Elastizitätsmodul E in Abhängigkeit des Lamé-Parameters λ für $\mu = 1$ ([Bra03, S. 271]).

λ	ν	E
0	0	2.0000000000000000e+00
1e+02	4.950495049504950e-01	2.990099009900990e+00
1e+04	4.999500049995000e-01	2.999900009999000e+00
1e+06	4.999995000005000e-01	2.999999000001000e+00
1e+08	4.999999950000000e-01	2.999999990000000e+00
1e+10	4.999999999500000e-01	2.999999999900000e+00

Literaturverzeichnis

- [AFW97] **Arnold**, Douglas N. ; **Falk**, Richard S. ; **Winther**, R.: Preconditioning in $H(\text{div})$ and applications. In: *Math. Comp.* 66 (1997), Nr. 219, S. 957–984. – ISSN 0025–5718
- [AFW00] **Arnold**, Douglas N. ; **Falk**, Richard S. ; **Winther**, Ragnar: Multigrid in $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$. In: *Numer. Math.* 85 (2000), Nr. 2, S. 197–217. – ISSN 0029–599X
- [AMM00] **Austin**, Travis M. ; **Manteuffel**, Thomas A. ; **McCormick**, Steve: A Robust Approach to Minimizing $H(\text{div})$ -Dominated Functionals in an H^1 -Conforming Finite Element Space. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 00 (2000), S. 1–23
- [Arn81] **Arnold**, Douglas N.: Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem. In: *Numer. Math.* 37 (1981), Nr. 3, S. 405–421. – ISSN 0029–599X
- [AS05] **Attia**, Frank S. ; **Starke**, Gerhard: On Discrete Korn's Inequality for some Nonconforming Finite Element Approaches to Linear Elasticity. In: *Proc. Appl. Math. Mech.* 5 (2005), Nr. 1, S. 823–824
- [BF91] **Brezzi**, Franco ; **Fortin**, Michel: *Springer Series in Computational Mathematics*. Bd. 15: *Mixed and hybrid finite element methods*. 2. New York : Springer-Verlag, 1991. – x+350 S. – ISBN 0–387–97582–9
- [Bra93] **Bramble**, James H.: *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Bd. 294: *Multigrid methods*. Harlow : Longman Scientific & Technical, 1993. – viii+161 S. – ISBN 0–582–23435–2
- [Bra03] **Braess**, Dietrich: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser, und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 3., korr. und erg. Aufl. Springer, 2003. – ISBN 3–540–00122–0
- [Bre04] **Brenner**, Susanne C.: Korn's inequalities for piecewise H^1 vector fields. In: *Math. Comp.* 73 (2004), Nr. 247, S. 1067–1087 (electronic). – ISSN 0025–5718
- [BS02] **Brenner**, Susanne C. ; **Scott**, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. 2nd Edition. New York : Springer-Verlag, 2002. – ISBN 0–387–95451–1

- [BZ00] **Bramble**, James H. ; **Zhang**, Xuejun: The analysis of multigrid methods. In: **Ciarlet**, G. (Hrsg.) ; **Lions**, L. (Hrsg.): *Handbook of numerical analysis, Vol. VII*. Amsterdam : North-Holland, 2000 (Handb. Numer. Anal., VII), S. 173–415
- [CKS05] **Cai**, Zhiqiang ; **Korsawe**, Johannes ; **Starke**, Gerhard: An adaptive least squares mixed finite element method for the stress-displacement formulation of linear elasticity. In: *Numer. Methods Partial Differential Equations* 21 (2005), Nr. 1, S. 132–148. – ISSN 0749–159X
- [CS03] **Cai**, Zhiqiang ; **Starke**, Gerhard: First-order system least squares for the stress-displacement formulation: linear elasticity. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 41 (2003), Nr. 2, S. 715–730 (electronic). – ISSN 0036–1429
- [CS04] **Cai**, Zhiqiang ; **Starke**, Gerhard: Least-squares methods for linear elasticity. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (2004), Nr. 2, S. 826–842 (electronic). – ISSN 0036–1429
- [DH02] **Deuffhard**, Peter ; **Hohmann**, Andreas: *Numerische Mathematik. I*. Third. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 2002 (de Gruyter Lehrbuch. [de Gruyter Textbook]). – xvi+371 S. – Eine algorithmisch orientierte Einführung. [An algorithmically oriented introduction]. – ISBN 3–11–017182–1
- [Fal91] **Falk**, Richard S.: Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity. In: *Math. Comp.* 57 (1991), Nr. 196, S. 529–550. – ISSN 0025–5718
- [Gat88] **Gatermann**, Karin: The construction of symmetric cubature formulas for the square and the triangle. In: *Computing* 40 (1988), Nr. 3, S. 229–240. – ISSN 0010–485X
- [Hac85] **Hackbusch**, Wolfgang: *Springer Series in Computational Mathematics*. Bd. 4: *Multigrid methods and applications*. Berlin : Springer-Verlag, 1985. – xiv+377 S. – ISBN 3–540–12761–5
- [Hac91] **Hackbusch**, Wolfgang: *Leitfäden der Angewandten Mathematik und Mechanik [Guides to Applied Mathematics and Mechanics]*. Bd. 69: *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Stuttgart : B. G. Teubner, 1991. – 382 S. – Teubner Studienbücher Mathematik. [Teubner Mathematical Textbooks]. – ISBN 3–519–02372–5
- [Hip97] **Hiptmair**, R.: Multigrid method for $\mathbf{H}(\text{div})$ in three dimensions. In: *Electron. Trans. Numer. Anal.* 6 (1997), Nr. Dec., S. 133–152 (electronic). – Special issue on multilevel methods (Copper Mountain, CO, 1997). – ISSN 1068–9613
- [KA00] **Knabner**, Peter ; **Angermann**, Lutz: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 2000. – ISBN 3–540–66231–6

- [KS04] **Klawonn**, Axel ; **Starke**, Gerhard: A preconditioner for the equations of linear elasticity discretized by the PEERS element. In: *Numer. Linear Algebra Appl.* 11 (2004), Nr. 5-6, S. 493–510. – ISSN 1070–5325
- [LL65] **Landau**, L. D. ; **Lifschitz**, E. M.: *Elastizitätstheorie*. Deutsche Auflage. Berlin : Akademie-Verlag, 1965
- [Mei99] **Meister**, Andreas: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Braunschweig/Wiesbaden : Verlag Vieweg, 1999. – ISBN 3–528–03135–2
- [MTW02] **Mardal**, Kent A. ; **Tai**, Xue-Cheng ; **Winther**, Ragnar: A robust finite element method for Darcy-Stokes flow. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 40 (2002), oct, Nr. 5, S. 1605–1631 (electronic). – ISSN 0036–1429
- [NTW01] **Nilssen**, Trygve K. ; **Tai**, Xue-Cheng ; **Winther**, Ragnar: A robust nonconforming H^2 -element. In: *Math. Comp.* 70 (2001), feb, Nr. 234, S. 489–505. – ISSN 0025–5718
- [Rö0] **Rössle**, Andreas: Corner Singularities and Regularity of Weak Solutions for the Two-Dimensional Lamé Equations on Domains with Angular Corners. In: *Journal of Elasticity* 60 (2000), S. 57–75
- [Sch98] **Schöberl**, Joachim: Robust multigrid preconditioning for parameter-dependent problems. I. The Stokes-type case. In: *Multigrid methods V (Stuttgart, 1996)* Bd. 3. Berlin : Springer, 1998, S. 260–275
- [Sch99] **Schöberl**, Joachim: *Robust Multigrid Methods for Parameter Dependent Problems*. Johannes Kepler Universität Linz : Dissertation, 1999
- [Xu92] **Xu**, Jinchao: Iterative methods by space decomposition and subspace correction. In: *SIAM Rev.* 34 (1992), Nr. 4, S. 581–613. – ISSN 0036–1445

Lebenslauf

Persönliche Daten

Frank Samir Attia, geboren am 11.07.1974 in Hannover, ledig, deutsch.

Schulbildung, Zivildienst

09.06.1994 Abitur am Gymnasium der Lutherschule, Hannover (Note 2,2)
08/1994 – 10/1995 Zivildienst in der ev.-luth. Bodelschwingh-Kirchengemeinde:
Betreuung Pflegebedürftiger, Fahrdienste, Organisation und
Durchführung von Kinderfreizeiten

Wissenschaftliche Tätigkeiten

10/1995 – 09/1997 Studiengang Lehramt an Gymnasien (Mathematik/Physik) an
der Universität Hannover

10/1995 – 09/1997 Grundstudium
13.07.1996 Zwischenprüfung Mathematik (Note sehr gut)

10/1997 – 05/2002 Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Informatik
an der Universität Hannover

10/1997 – 09/1999 Grundstudium
20.10.1999 Vordiplom (Note sehr gut)
10/1999 – 05/2002 Hauptstudium, Schwerpunkte: Relationale Datenbanksysteme,
Formale Sprachen, Funktionentheorie, Numerik partieller
Differentialgleichungen

11/2000 – 04/2001 Diplomarbeit: *Diskonjugiertheit und Schlichtheit*,
Entwicklung globaler Schlichtheitskriterien für lokal
schlichte Funktionen (Note 1,7)

31.05.2002 Diplom-Mathematiker (Note sehr gut)

01.09.2002 – heute Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte
Mathematik

Sonstige Tätigkeiten

10/1995 – 2005 Ehrenamtlicher Mitarbeiter der ev.-luth. Bodelschwingh-
Kirchengemeinde: Jugendgruppenleiter, Planung und Durch-
führung konkreter Projekte (Kinderfreizeiten) im Team,
Schulung jugendlicher Mitarbeiter

04/1997 – 07/2001 Angestellt am Fachbereich für Mathematik und Informatik
an der Universität Hannover: Entwurf von Übungsstunden
und Lehrtätigkeit, Korrektur von Hausübungen und Klausuren

05/2001 – 04/2002 Werkstudent bei der Fujitsu Siemens Computers GmbH, im
Vertrieb: Evaluation von Kundenwünschen mit anschließender
Angebotserstellung, Erschließung neuer Vertriebskanäle,
Bereich: High Performance Computing (hpcline)