

# **Strukturidentifikation und Unterscheidbarkeit von Modellen für elektromechanische Antriebsstränge**

Structure identification and distinguishability for models of electromechanical drive trains

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

Dr.-Ing.

genehmigte

**Dissertation**

von

**Mathias Tantau, M. Sc.**

**2024**

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Tobias Ortmaier
  2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Eduard Reithmeier
- Tag der Promotion: 10. Juni 2024

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronische Systeme (imes) der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover unter der Leitung von Prof. Tobias Ortmaier.

Direkt im Anschluss an das Studium durfte ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am imes anfangen, obwohl meine Masterarbeit an einem anderen Institut stattgefunden hatte. Ermöglicht wurde dies dadurch, dass die Stelle öffentlich ausgeschrieben war. Das bedeutete einen großen Glücksfall für mich. Ich schätze das nette „Betriebsklima“ und die Arbeit an sehr vielfältigen und praxisrelevanten Projekten.

Meinem Doktorvater, Prof. Ortmaier, möchte ich für die Betreuung und den stets vertrauensvollen, offenen Austausch danken. Auch dem Zweitprüfer, Prof. Reithmeier, sei Dank für seine Rückmeldungen.

Herzlich möchte ich mich bei Dr. Florian Leydecker vom Institut für Angewandte Mathematik für seine Unterstützung bei der Beweisführung in Anhang A bedanken. Zu den Beweisen in der Veröffentlichung [THPW21] hat der ehemalige Student Christian Helmke wichtige Beiträge geleistet. Mein Dank gilt auch den aus der Literatur bekannten Experten, mit denen es zu interessanten Konversationen via E-Mail gekommen ist, z. B. Prof. Alexander Lanzon von der University of Manchester, Prof. Sigurd Skogestad von der Norwegian University of Science and Technology und Prof. Tom Oomen von der Eindhoven University of Technology.

Die Firma Lenze SE, deren Mitarbeiter die Forschungsprojekte hauptsächlich betreut haben, hat einen erheblichen Beitrag zu der Forschung geleistet und sehr viel Knowhow sowie gute Ideen einfließen lassen. Von den regelmäßigen Besprechungen und der Unterstützung bei technischen Fragen zwischendurch habe ich jederzeit profitiert. Hoffentlich haben sich auch für die besagten Mitarbeiter noch neue Erkenntnisse ergeben.

Schließlich danke ich meiner Familie. Meine Frau Cailin hat oftmals in den fünf Jahren ihre Wünsche nach gemeinsamer Zeit hintenan gestellt. Mein Vater hat die Arbeit Korrektur gelesen.

Hannover, Juni 2024

*Mathias Tantau*

## Kurzfassung

Ein mechatronisches System, wie eine Werkzeugmaschine, ein Roboter oder ein Regalbediengerät, zeichnet sich dadurch aus, dass eine Steuerungseinheit mithilfe von Aktoren gezielt die natürlichen Eigenschaften des Systems beeinflusst. Häufig kommen die besten Ergebnisse zustande, wenn ein Modell des Systems die Grundlage der Steuerungsalgorithmen darstellt. Doch die Ableitung von physikalischen Gleichungen und Modellen ist zeitaufwendig, verlangt Expertenwissen und es ist nicht immer vorab bekannt, welche physikalischen Effekte mit berücksichtigt werden sollten bzw. vernachlässigbar sind und welche Modellkomplexität angemessen ist.

In dieser Arbeit werden verschiedene Varianten der Strukturidentifikation auf ein Regalbediengerät und einen Positionierantrieb angewandt, wobei der Fokus auf der Mechanik liegt, nicht auf den elektrischen Eigenschaften der Leistungselektronik oder der Aktoren. Mithilfe eines modularen „Baukastensystems“ werden häufig verwendete Teilmodelle zu Gesamtmodellen kombiniert und bewertet.

Bei der Bewertung wird ein Fokus auf die physikalische Interpretierbarkeit gelegt, indem die Identifizierbarkeit der Parameter mit berücksichtigt wird. Dadurch entstehen eher einfache und relativ ungenaue Modelle. Es wird aber gezeigt, dass sich durch die Nutzung von temporärer Zusatzsensorik für die Inbetriebnahme die Identifizierbarkeit verbessert und komplexere Modelle identifizierbar werden.

Weiterhin wird die Unterscheidbarkeit unterschiedlicher Modelle anhand des Ein-Ausgangsverhaltens untersucht. Beispiele zeigen die Notwendigkeit zur eindeutigen Strukturbestimmung auf. Häufig ist aber die Unterscheidbarkeit nicht gegeben. Auch hier werden temporäre Zusatzsensoren für die Inbetriebnahme als Möglichkeit zur Verbesserung betrachtet. Eine Einschränkung der Unterscheidbarkeits-Methoden ist, dass sie manchmal keine eindeutige Aussage liefern. Es wird gezeigt, dass die Kombination mehrerer Methoden hier Vorteile bietet.

Als besonders anwendungsspezifische Strukturidentifikation wird zuletzt der Frage nachgegangen, wie ein Modell für die Reglerauslegung optimiert werden kann. Die Kostenfunktionen für Parameteridentifikation und Modellauswahl ergeben sich in diesem Fall aus dem Regelungsziel, sodass dieses schon vorab feststehen muss. Die resultierenden Modelle sind ähnlich zu denen, die sich mit eher Identifikations-typischen Kostenfunktionen ergeben, außer dass besonders ungünstige Modelle erfolgreich vermieden werden.

**Schlagwörter:** Struktur- und Parameteridentifikation, Modellauswahl, praktische Identifizierbarkeit, strukturelle Identifizierbarkeit, Unterscheidbarkeit, regelungstechnisch relevante Modellauswahl, Vinnicombe Metrik.

## Abstract

A mechatronic system, such as a machine tool, a robot or a storage and retrieval gadget, is characterized by the property that a control unit uses actuators to specifically influence the natural characteristics of the system. Often, the best results are achieved when a model of the system forms the basis of the control algorithms. However, deriving physical equations and models is time-consuming, requires expert knowledge, and it is not always known in advance which physical effects should be included or are negligible and what model complexity is appropriate.

In this work, different variants of structure identification are applied to a stacker crane and a positioning drive, focusing on the mechanics, not on the electrical properties of the power electronics or the actuators. With the help of a modular „building set“ commonly used submodels are combined before evaluating the results.

The evaluation focuses on physical interpretability by considering identifiability of the parameters. This results in rather simple and relatively inaccurate models. However, it is shown that by using temporary auxiliary sensors for commissioning, identifiability improves and more complex models become feasible.

Furthermore, distinguishability of different models is investigated based on the input-output behavior. Examples show the need for unambiguous structure identification. Often, however, distinguishability is not given. Again, temporary auxiliary sensors for commissioning are considered as a possibility for improvement. A shortcoming of distinguishability methods is that they sometimes fail to provide an unambiguous decision. Leveraging this limitation it is shown that the methods are complementary in the sense that most unambiguous statements are obtained when several approaches are combined.

Finally, as a particularly application-specific structure identification, the question of how a model can be optimized for controller design is addressed. In this case, the cost functions for parameter identification and model selection result from the control objective, so that the latter must be determined in advance. The resulting models are similar to those obtained with more identification-typical cost functions, except that particularly unfavorable models are successfully avoided.

**Keywords:** Structure and parameter identification, model selection, practical identifiability, structural identifiability, distinguishability, control-relevant model selection, Vinnicombe gap metric.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>iii</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>iv</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Wissenschaft . . . . .	3
1.1.1 Verwandte Arbeiten und Abgrenzung zu dieser Arbeit . . . . .	3
1.1.2 Übergang von der Parameteridentifikation zur Modellauswahl . . . . .	4
1.1.3 Bekannte Probleme bei der Struktur- und Parameteridentifikation . . . . .	6
1.2 Fazit zur Literaturübersicht . . . . .	7
1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Prüfstände und mögliche Modelle</b>	<b>9</b>
2.1 Vorstellung der Prüfstände . . . . .	9
2.2 Teilmodelle und Integration in ein Gesamtmodell . . . . .	11
2.2.1 Baukasten-Modellierung . . . . .	12
2.2.2 Betrachtete Teilmodelle . . . . .	15
2.3 Kombinatorik der Mehrmassenschwingermodelle . . . . .	20
<b>3 Strukturidentifikation unter Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit</b>	<b>25</b>
3.1 Grundlagen und bisherige Arbeiten zur Identifizierbarkeit . . . . .	25
3.1.1 Bisherige Arbeiten zur Modellauswahl auf Basis der Identifizierbarkeit . . . . .	26
3.1.2 Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit . . . . .	27
3.1.3 Bewertung der Nichtlinearität . . . . .	29
3.2 Verfahren im Frequenzbereich . . . . .	31
3.2.1 Algorithmischer Ablauf . . . . .	31
3.2.2 Wahl der Kostenfunktion im Frequenzbereich . . . . .	32
3.2.3 Ergebnisse der Struktur- und Parameteridentifikation . . . . .	37
3.2.4 Schwellwert-Abhängigkeiten . . . . .	42
3.3 Verfahren im Zeitbereich . . . . .	44
3.3.1 Algorithmischer Ablauf . . . . .	45

3.3.2	Überprüfung der linearen Näherung . . . . .	47
3.3.3	Ergebnisse der Strukturoptimierung . . . . .	49
3.4	Nutzen von Zusatzsensorik für die Identifizierbarkeit . . . . .	55
3.4.1	Vorgehen zur Bewertung der strukturellen Identifizierbarkeit . . . . .	55
3.4.2	Grad der Identifizierbarkeit . . . . .	56
3.4.3	Ergebnisse zur strukturellen Identifizierbarkeit . . . . .	58
3.4.4	Ergebnisse zum Grad der Identifizierbarkeit . . . . .	59
3.5	Fazit . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Unterscheidbarkeit von Strukturen</b>	<b>63</b>
4.1	Beispiele für die Wichtigkeit der Unterscheidbarkeit . . . . .	63
4.2	Definitionen und Methoden . . . . .	66
4.2.1	Definition der Unterscheidbarkeit dynamischer Modelle . . . . .	66
4.2.2	Methoden zur Untersuchung der strukturellen Unterscheidbarkeit . . . . .	68
4.3	Unterscheidung anhand der Resonanzen und Antiresonanzen im Frequenzgang . . . . .	70
4.3.1	Mögliche Formen von Pol- und Nullstellen . . . . .	71
4.3.2	Mögliche Anordnungen von Pol- und Nullstellen beim Dreimassenschwinger . . . . .	73
4.3.3	Untersuchung der Nenner-Polynome . . . . .	74
4.3.4	Detailanalyse der elf DMS-Systeme . . . . .	76
4.3.5	Beispiele und experimentelle Validierung . . . . .	78
4.3.6	Diskussion . . . . .	81
4.4	Unterscheidbarkeit anhand der Markov-Parameter und Koeffizienten der ÜTF . . . . .	81
4.4.1	Sequentielle Überprüfung von Kriterien . . . . .	82
4.4.2	Abhängigkeit von der Wahl der Gleichungen . . . . .	85
4.4.3	Unterscheidbarkeit von Dreimassenschwingermodellen ohne Zusatzsensorik . . . . .	86
4.4.4	Unterscheidbarkeit der Dämpferpositionen . . . . .	90
4.5	Nutzen von Zusatzsensorik für die Unterscheidbarkeit . . . . .	91
4.5.1	Definition von Szenarien . . . . .	91
4.5.2	Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen . . . . .	92
4.5.3	Experimentelle Versuche zur Struktur- und Parameteridentifikation mit Beschleunigungssensoren . . . . .	95
4.5.4	Versuchsergebnisse . . . . .	95
4.6	Fazit . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Regelungstechnisch relevante Identifikation und Modellstrukturoptimierung</b>	<b>101</b>
5.1	Einfluss der Modellkomplexität auf die Reglerauslegung . . . . .	101
5.1.1	Vergleich einfacher, modellbasierter Regler durch nichtparametrisches Modell . . . . .	101
5.1.2	Regler höherer Ordnung . . . . .	102



---

5.2	Grundlagen zur regelungstechnisch relevanten Identifikation . . . . .	104
5.2.1	Reglerauslegungsziel und abgeleitete Identifikationskriterien . . . . .	104
5.2.2	Allgemeines Abstandsmaß und Stabilitätsreserve . . . . .	106
5.2.3	Spezialisierung auf vier-Block Unsicherheit oder coprime factor Unsicherheit	108
5.2.4	Fazit . . . . .	110
5.3	Identifikation von Servo-Systemen mit regelungstechnischen Abstandsmaßen . .	111
5.3.1	Berücksichtigung der WZB der Vinnicombe Metrik . . . . .	111
5.3.2	Iterative Identifikation und Reglerauslegung . . . . .	112
5.3.3	Festlegung der Modellordnung bei der Modellauswahl . . . . .	118
5.4	Experimenteller Vergleich der Identifikationsmethoden . . . . .	118
5.4.1	Durchführung der Versuche und Berechnungen . . . . .	119
5.4.2	Ergebnisse des iterativen Verfahrens aus Identifikation und Reglerauslegung	120
5.4.3	Vergleich der Methoden . . . . .	121
5.4.4	Rechenzeiten . . . . .	126
5.4.5	Wahl der Modellordnung . . . . .	127
5.5	Fazit . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Schlussfolgerung und Ausblick</b>	<b>131</b>
6.1	Schlussfolgerung . . . . .	131
6.2	Ausblick . . . . .	133
<b>A</b>	<b>Beweis zu linearen Abhängigkeiten für die Unterscheidbarkeitsuntersuchung</b>	<b>135</b>
<b>B</b>	<b>Markov-Parameter-Ansatz zur Unterscheidbarkeitsanalyse von MIMO Systemen</b>	<b>137</b>
<b>C</b>	<b>Rechtfertigung der Vereinfachung in der Berechnung des strukturierten Singulärwertes</b>	<b>139</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>



## Abbildungsverzeichnis

2.1	Prüfstand Regalbediengerät (RBG) . . . . .	9
2.2	Prüfstand Einzelachse . . . . .	10
2.3	Kaskadenregelung aller Motoren der Prüfstände . . . . .	11
2.4	Zustandsraumdarstellung der Baukastenmodellierung . . . . .	13
2.5	Zustandsraumdarstellung erweitert um nichtlineare Zustandsrückführung . . . . .	14
2.6	Adressierung von Teilmatrizen durch Beschränkung auf ausgewählte Eingänge, Zustände und Ausgänge . . . . .	14
2.7	Beispiel für Mehrmassensysteme . . . . .	16
2.8	Spiel zwischen der ersten und zweiten Masse . . . . .	18
2.9	Hystereseschleife des Feder-Dämpfer-Elements mit Spiel. . . . .	19
2.10	Beispielhaftes Mehrmassenmodell . . . . .	21
3.1	Frequenzgang des Einachsprüfstands vs. Beispielmodell . . . . .	35
3.2	Visualisierung der Sensitivitätsfunktionen für zwei verschiedene Kostenfunktionen	36
3.3	Klasse der Modellkandidaten als lineares Ersatzmodell . . . . .	37
3.4	Messung vs. bestes Modell . . . . .	39
3.5	Zusammensetzung der sortierten Modelle, Frequenzbereichsidentifikation, Prüfstand RBG . . . . .	40
3.6	Zusammensetzung der sortierten Modelle, Frequenzbereichsidentifikation, Prüfstand Einzelachse . . . . .	40
3.7	Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit für den Einachsprüfstand . . . . .	42
3.8	Anzahl der Schätzparameter des besten Modells für einen Schwellenwert . . . . .	43
3.9	Anzahl der Modelle, die das betrachtete Kriterium erfüllen . . . . .	43
3.10	Gemessener Systemausgang (MFE-Anregung) vs. Modellausgang des identifizierten Modells . . . . .	48
3.11	PL Plots entsprechend Abbildung 3.10 . . . . .	49
3.12	Schnitte durch die Kostenfunktion . . . . .	50
3.13	Vergleich der Ausgangsgröße von Modell vs. Trainingsdaten . . . . .	52
3.14	Residuum des genauesten Modells sowie der Teilmodelle . . . . .	53
3.15	Zusammensetzung der sortierten Modelle, Zeitbereichsidentifikation, Prüfstand Einzelachse . . . . .	54
3.16	Vergleich der Ausgangsgröße von Modell und Validierungsdaten . . . . .	54
4.1	Geschwindigkeitsverlauf bei flachheitsbasierter Vorsteuerung . . . . .	65

4.2	Lage der Wurzeln in der komplexen Ebene . . . . .	72
4.3	Frequenzgang des Systems 3B2 in einer Parametrierung, die zu RR (nm) führt . . . . .	79
4.4	Vergleich der Modelle 3A2 und 3A5 bzw. 3B2 und 3C2 . . . . .	80
4.5	Schema zur Untersuchung der Unterscheidbarkeit durch Überprüfung der SI. Genauere Erklärungen und Literaturquellen sind im Text gegeben. . . . .	82
4.6	Unterscheidbarkeitsanalyse ohne Dämpfung . . . . .	87
4.7	Unterscheidbarkeitsanalyse inkl. Dämpfung . . . . .	89
4.8	System 3A4* angepasst an 3A1* mit beliebiger Parametrierung . . . . .	89
4.9	Unterscheidbarkeit der Dämpferpositionen . . . . .	90
4.10	Ergebnis zu Frage I, Sensoren an beiden Kraftangriffspunkten . . . . .	93
4.11	Ergebnis zu Frage II, d. h. ein Zusatzsensor an unbekannter Position. . . . .	93
4.12	Bestückung des RBG mit Zusatzsensorik . . . . .	96
4.13	Gemessene Frequenzgänge für Motorposition und Zusatzsensor vs. resultierendes Modell 3A1* für die $x$ -Achse des RBG . . . . .	97
4.14	Modell der $z$ -Achse . . . . .	97
4.15	Gemessener Frequenzgang von Drehmoment zu Motorposition für die $z$ -Achse . . . . .	98
4.16	Zwei mögliche Modellvereinfachungen . . . . .	98
4.17	Gemessene Frequenzgänge vs. resultierendes Modell 2B1* für die $z$ -Achse . . . . .	99
5.1	Vergleich zweier Regler evaluiert am gemessenen Frequenzgang bzw. am idealen ZMS- bzw. DMS-Modell . . . . .	103
5.2	Visualisierung der ÜTF $\mathbf{W}_{uy}\mathbf{T}(\mathbf{P}_2, \mathbf{C})\mathbf{V}$ nach [OvQ+13] . . . . .	105
5.3	Zugrundeliegender Rückführkreis aus Regler und gestörtem System . . . . .	107
5.4	Beispielhafte Unsicherheitsformen . . . . .	108
5.5	Standard-Regelkreis in der Form von Abbildung 5.3 mit dual-Youla Unsicherheit . . . . .	114
5.6	Allgemeiner Regelkreis mit den Hilfsgrößen $\mathbf{S}$ , $\mathbf{G}$ und $\mathbf{N}$ . . . . .	114
5.7	Definition der Verbindungsmatrix $\mathbf{S}$ . . . . .	116
5.8	Konvergenzverhalten des iterativen Verfahrens . . . . .	121
5.9	Bode-Diagramm des Modells mit acht Parametern inklusive dual-Youla Unsicherheitsmenge für zwei verschiedene Regler . . . . .	122
5.10	Erreichte Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises . . . . .	123
5.11	Verschlechterung der Performance beim Übergang zum realen System für die verschiedenen Bewertungskriterien . . . . .	124
5.12	Performance am realen System $\ \mathbf{W}_{uy}\mathbf{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C})\mathbf{V}\ _\infty$ für die verschiedenen Identifikationskriterien . . . . .	125
5.13	Bode-Diagramme für Modell und Messung bestimmt mit der $\nu$ -gap metric als Kostenfunktion . . . . .	126

---

5.14 Offener Regelkreis für das Modell mit acht Parametern, bestimmt mit der Kostenfunktion aus log. Betrag und Phase sowie der Abstand $\bar{\sigma}(\mathbf{W}_{wy}(\mathbf{T}(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{C}) - \mathbf{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}))\mathbf{V})$ . . . . .	127
--	-----



## Tabellenverzeichnis

2.1	Anzahl der möglichen Modelle für unterschiedliche Anzahlen von Massen . . . . .	22
2.2	Kompletter Satz von zu berücksichtigenden ZMS-Modellen . . . . .	23
2.3	Kompletter Satz von zu berücksichtigenden DMS-Modellen . . . . .	24
3.1	Lokale Kriterien zur Bewertung der praktischen Identifizierbarkeit . . . . .	35
3.2	Identifizierte Werte vs. Vergleichswerte für ausgewählte Parameter aus Frequenzbereichsidentifikation (erster bis siebter) und aus Einstellung am Prüfstand (letzter)	53
3.3	Strukturelle Identifizierbarkeit der elf DMS-Systeme mit Beschleunigungssensor	58
3.4	Kleinster Eigenwert von $\mathbf{S}_{nl}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{nl}$ mit Wegaufnehmer und Beschleunigungssensor	60
4.1	Eigenschaften der Frequenzgänge der untersuchten Systeme . . . . .	77
4.2	Parameter der Modelle 3A2 und 3A5 zu Abbildung 4.4(a) . . . . .	79
4.3	Parameter der Modelle 3B2 und 3C2 entsprechend der ÜTF in Abb. 4.4(b) . . . . .	79
4.4	Parameter der kollokierten Modelle, die einen Frequenzgang wie in Abbildung 3.4(a) aufweisen können . . . . .	81
4.5	Ergebnis zu Frage III, d. h. an den markierten Stellen kann bei bekanntem Modell aus den Messdaten die Masse bestimmt werden, auf welcher der zusätzliche Sensor montiert ist. . . . .	94
4.6	Residuen der drei ZMS-Modelle für die zwei möglichen Positionen des Beschleunigungssensors . . . . .	99
5.1	Gewichte für die Festlegung der Kostenfunktion . . . . .	119
5.2	Worst-case Performance für die beiden Methoden, die eine solche Aussage zulassen, Prüfstand: RBG, $x$ -Achse . . . . .	123
5.3	Rechenzeiten für die Bestimmung der Modelle des RBG inklusive Reglerauslegung, aufaddiert über alle Iterationen, sofern relevant . . . . .	127
5.4	Residuen $\delta_\nu(\hat{\mathbf{P}}, \mathbf{P}_0)$ bei der Identifikation in der $\nu$ -gap metric, wie in Abschnitt 5.4.3 durchgeführt . . . . .	128





## Nomenklatur

Einige Formelzeichen sind nur im Text definiert, wenn sie nur abschnittsweise Bedeutungen haben.

### Allgemeine Konventionen

$a$	nicht fett	Skalar
$\mathbf{a}$	fett	Vektor, Matrix
$\hat{a}$	Dach	Geschätzte/identifizierte Größe
$\mathbf{A}^T$		Matrixtransposition
$\overline{\mathbf{A}}$		konjugiert komplex
$\mathbf{A}^*$		$(\overline{\mathbf{A}})^T$ , auch genannt <i>hermitesche Transposition</i>
$\mathbf{P}^*(s)$		$\overline{\mathbf{P}(-\bar{s})}^T$ , bei Übertragungsfunktionen, die von der komplexen Laplace-Variable $s$ abhängen
wno		Windungszahl, siehe Abschnitt 5.2
$\text{tr}(\mathbf{A})$		Spur

### Formelzeichen mit lateinischen Buchstaben

$\mathbf{A}_Z$	A-Matrix der Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{B}_Z$	B-Matrix der Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{C}$	Regler
$\mathbf{C}_Z$	C-Matrix der Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{D}_c$	$\mathbf{N}_c \mathbf{D}_c^{-1} = \mathbf{C}$ : Rechtsseitige kopprime Faktorisierung des Reglers
$\mathbf{D}_Z$	D-Matrix der Zustandsraumdarstellung
$\mathbf{D}_1$	$\mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^{-1} = \mathbf{P}_1$ : Rechtsseitige kopprime Faktorisierung
$F_M$	Motorkraft in N bzw. -moment in Nm
$F_R$	Reibkraft in N bzw. -moment in Nm
$\mathbf{f}_{nl}$	nichtlinearer Teil der Systemfunktion
$\mathbf{g}_{nl}$	nichtlinearer Teil der Ausgangsfunktion
$g_v$	Koeffizient der viskosen Reibung in Nm · s/rad bzw. N · s/rad
$h$	Nichtlineare Modellfunktion
$\mathbf{H}$	Blockmatrix zur Definition der Unsicherheitsform
$\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21}, \mathbf{H}_{22}$	Blockmatrizen der Matrix $\mathbf{H}$
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix

$\mathcal{J}$	Kostenfunktion
$\mathcal{J}_{\text{WC}}$	„worst-case“ Kostenfunktion
$k_{\text{M}}$	Motorkonstante in Nm/A oder $V \cdot \text{s}/\text{rad}$
$\mathbf{M}$	Massenmatrix in kg bzw. $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$\mathbf{M}_b$	siehe Abbildung 5.3
$\mathbf{M}_c$	Matrix $\mathbf{M}_b$ im Fall der coprime factor Unsicherheit
$\mathbf{M}_v$	Matrix $\mathbf{M}_b$ im Fall der Vier-Block Unsicherheit
$M_{\text{C}}$	Kraft in N bzw. Moment in Nm der COULOMB'schen Reibung
$M_{\text{G}}$	Kraft in N bzw. Moment in Nm der Gravitation
$m_i$	Masse $i$ des Mehrmassenschwingers in kg
$M_{\text{S}}$	Kraft in N bzw. Moment in Nm der STRIBECK-Reibung
$N$	Anzahl der Massen beim Mehrmassenschwinger
$\mathbf{N}$	siehe Abbildung 5.6
$\mathbf{N}_c \mathbf{D}_c^{-1} = \mathbf{C}$	Rechtsseitige kopprime Faktorisierung der Regler-ÜTF
$N_f$	Anzahl der Frequenzen
$N_m$	Anzahl der Messwerte
$N_{\text{SI}}$	Anzahl der Strukturinvarianten
$\mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^{-1} = \mathbf{P}_1$	Rechtsseitige kopprime Faktorisierung
$N_{\theta}$	Anzahl der Parameter
$N_u$	Anzahl Eingänge eines MIMO Systems
$N_y$	Anzahl Ausgänge eines MIMO Systems
$N_Z$	Anzahl der Zustände des betrachteten Modells
$\mathbf{0}$	Nullmatrix/-vektor
$\tilde{\mathbf{P}}_0$	wahres, nicht bekanntes System
$\mathbf{P}_0$	Messung des wahren Systems inklusive Messrauschen
$\hat{\mathbf{P}}$	Modell
$q_i$	Position der Masse $i$ in m bzw. rad
$\dot{q}_{i,0}$	Bezugsgeschwindigkeit der STRIBECK-Reibung in m/s bzw. rad/s
$\mathbf{S}_{\text{nl}}$	Sensitivitätsmatrix
$\mathbf{T}$	Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises, siehe (5.2)
$T_1$	Verzögerungszeit der $P_{T1}$ -Stromregelungs-Näherung
$T_{\text{mess}}$	Abtastzeit der Zeitbereichsmessung in s
$T_{\text{sens}}$	Abtastzeit der Sensitivitätssimulation in s
$T_{\text{sys}}$	Abtastzeit der Simulation des Systems in s
$T_t$	Totzeit in s
$\mathbf{u}$	Systemeingang
$v$	Messrauschen
$\mathbf{V}$	Blockdiagonalmatrix zur Eingangsgewichtung, siehe Abbildung 5.2
$\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$	Blöcke der Matrix $\mathbf{V}$

$w$	Performance-Eingang, siehe Abbildungen 5.2, 5.6
$\mathbf{W} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}$	Gewichtungsmatrix der Identifikation
$\mathbf{W}_{uy}$	Blockdiagonalmatrix zur Gewichtung der Messung, siehe Abbildung 5.2
$\mathbf{W}_u, \mathbf{W}_y$	Blöcke der Matrix $\mathbf{W}_{uy}$
$\mathbf{W}_i$	Eingangsgewichtung des Systems
$\mathbf{W}_o$	Ausgangsgewichtung des Systems
$\mathbf{x}_0$	Anfangszustand
$\mathbf{x}_{1,0}, \mathbf{x}_{2,0}$	Anfangszustand des Modells $M_1$ bzw. $M_2$
$\tilde{\mathbf{y}}_0$	wahre, aber unbekannte Ausgangsgröße des zu identifizierenden Systems
$\mathbf{y}_0$	gemessene Ausgangsgröße inklusive Messrauschen
$\hat{\mathbf{y}}$	Modellausgang
$z$	Performance-Ausgang, siehe Abbildungen 5.2, 5.6

### Formelzeichen mit griechischen Buchstaben

$\theta$	Parametervektor
$\hat{\theta}$	identifizierte Parameter
$\theta_0$	wahre Parameter
$\mathbf{\Lambda}$	Gewichtungsmatrix $\mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{W}$
$\sigma(\mathbf{A})$	Singulärwert der Matrix $\mathbf{A}$
$\underline{\sigma}(\mathbf{A})$	kleinster Singulärwert von $\mathbf{A}$
$\bar{\sigma}(\mathbf{A})$	größter Singulärwert von $\mathbf{A}$
$\Phi_1, \Phi_2$	Strukturinvarianten
$\omega$	Kreisfrequenz
$\Omega_1, \Omega_2$	zulässiger Parameterbereich für Modell $M_1$ bzw. $M_2$

### Abkürzungen

		Zuerst verwendet
A	Antiresonanz	S. 73
AD	Analog-Digital	S. 95
AIC	Akaike Information Criterion	S. 5
DMS	Dreimassensystem / Dreimassenschwinger	S. 15
EMS	Einmassensystem / Einmassenschwinger	S. 15
FPE	Final Prediction Error	S. 5
HE	Halbebene	S. 72
LTA	Laplace-Transformations-Ansatz	S. 69

---

MEMS	mikro-elektromechanisch	S. 55
MFE	Multi Frequency Excitation	S. 47
MPA	Markov-Parameter-Ansatz	S. 69
nm	nichtminimalphasige Wurzeln	S. 72
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeinheit	S. 135
PI	Proportional-Integral	S. 11
PII	Parameter Importance Index	S. 28
PL	Profile Likelihood	S. 29
PNK	Pol-Nullstellen-Kompensation	S. 67
PSO	Partikelschwarmoptimierung	S. 38
R	Resonanz	S. 73
RBG	Regalbediengerät	S. 9
SI	Strukturinvarianten	S. 68
SIMO	Single-Input-Multiple-Output	S. 92
SISO	Single-Input-Single-Output	S. 20
ÜTF	Übertragungsfunktion	S. 3
VMS	Viermassensystem / Viermassenschwinger	S. 15
WC	worst-case	S. 113
ZMS	Zweimassensystem / Zweimassenschwinger	S. 15
ZRD	Zustandsraumdarstellung	S. 12

# 1 Einleitung

In mechatronischen Systemen, wie Werkzeugmaschinen, Robotern oder Regalbediengeräten stellen *Servoantriebe* (Elektromotor und Anteuierung) wichtige Bausteine dar, denn sie sind der Ursprung der geforderten präzisen und gleichzeitig dynamischen Bewegung. Elektromotoren werden so häufig eingesetzt, dass etwa 50 % der gesamten elektrischen Energie weltweit durch sie verbraucht wird [BV03]. Anders ausgedrückt, fast 70 % des industriellen Stromverbrauchs wird in Elektromotoren umgesetzt [Mor23]. Durch die aktuellen Bestrebungen nach Digitalisierung und Industrie 4.0 sowie durch gesetzliche Rahmenbedingungen steigt der Bedarf weiter und auch die Anforderungen steigen. Besonders in Indien, China und Südostasien nimmt die Nachfrage zu. Global gesehen ist ein kontinuierliches, stetiges Wachstum auf dem Markt der Servomotoren- und Ansteuerungen zu verzeichnen [Pre23].

Wenn ein elektrisches Antriebssystem in Betrieb genommen wird, ist häufig ein wesentlicher Bestandteil der Inbetriebnahme der Entwurf einer Motorregelung- und Vorsteuerung. Zahlreiche Methoden, die mit Reglerauslegung im weitesten Sinne in Zusammenhang stehen, gehen den Umweg über Modelle der Regelstrecke, an denen der Regler ausgelegt wird, bevor er auf das reale System angewandt wird. Beispiele sind Reglerparametrierung, virtuelle Inbetriebnahme, modellprädiktive Regelung, Vorsteuerung, online-Zustandsbeobachtung und Fehlererkennung. Wichtig ist dabei die Genauigkeit des Modells, damit der Übergang vom *Modell der Regelstrecke* auf die *Regelstrecke als reales System*, im Folgenden kurz als Modell und reales System bezeichnet, gelingt. Typischerweise erlaubt es dieser Umweg, Parametrierungen zu testen und das Verhalten des realen Systems vorherzusagen, ohne wirklich kostspielige und möglicherweise gefährliche Versuche durchführen zu müssen.

Dynamische Modelle werden je nach Entstehung und Aufbau in Abstufungen von *white-box* (vollständig theoretische Modellbildung) bis *black-box* (vollständige experimentelle Modellbildung) klassifiziert [Ise08]: *white-box* Modelle basieren auf mathematisch formulierten Naturgesetzen und Parametern, die der Physik des realen Systems ähneln und durch Domänenwissen/Vorwissen bekannt sind. Die Zustände und Parameter sind physikalisch interpretierbar<sup>1</sup>. Für die Zwischenstufen gibt es verschiedene Taxonomien [Nel01; Now16; Boh06]. Nach [Ise08] gibt es die Zwischenstufe *bright grey-box Modell*, wobei die Gleichungen durch Vorwissen festgelegt werden, aber einige oder sämtliche Modellparameter identifiziert werden. Außerdem gibt es die Zwischenstufe *dark grey-box Modelle*, welche Vorwissen nur zur Festlegung einiger Modelleigenschaften verwendet und dann eine Struktur wie bei *black-box* Modellen identifiziert. *Black-box Modelle* haben eine

<sup>1</sup>Es wird auch von dem *deduktiven Weg* der Modellbildung gesprochen, im Gegensatz zum *induktiven Weg* bei *black-box* Modellen [MBC95].

universelle innere Struktur und lassen sich durch ihre typischerweise vielen freien Parameter flexibel an das gemessene Ein-Ausgangsverhalten anpassen [MBC95]. Das angepasste Modell hat dann eine andere Struktur als das reale System und die Parameter entbehren meist einer physikalischen Bedeutung<sup>2</sup>.

White-box und bright grey-box Modelle werden auch als *phänomenologische, strukturierte* [MBC95], *physikalisch motivierte* oder *mechanistische* [MPD+18] Modelle bezeichnet, während black-box Modelle auch *datenbasiert, unstrukturiert* genannt werden. Da in der Praxis eine Identifikation für ein genaues Modell fast immer erforderlich ist [Now16], sind bright grey-box und black-box Modelle besonders beliebt.

Gegenüber den datenbasierten black-box Modellen bieten die phänomenologischen bright grey-box Modelle folgende Vorteile:

- Interpretation der Eigenschaften und Extraktion von Wissen über das System, inkl. Bestimmung der inneren Zustände [HMC+08; MBC95],
- Möglichkeit von Zustandsbeobachtern und Zustandsreglern, Reglerauslegung über Polvorgabe oder LEHR'sches Dämpfungsmaß,
- Einfluss von Parameteränderungen kann vorhergesagt werden [Ise08],
- online-Nachführung der abgeleiteten Methoden, z. B. Reglereinstellung möglich,
- gute Extrapolation bei unbekanntem Anregungen [BV03],
- hohe Genauigkeit schon mit wenigen Parametern (bei gutem Vorwissen) [Boh06],
- Wiederverwertung von Wissen zu ähnlichen Modellen möglich,
- hohe Akzeptanz in der Industrie, u.a. weil die identifizierten Parameter mit Werten aus anderen Quellen verglichen werden können [Sch03; Boh06].

Es gibt also viele Gründe, bei den oben genannten Methoden modellbasiert und zwar mit physikalisch motivierten Modellen zu arbeiten.

Trotz dieser Vorzüge und der durchaus gut bekannten Methoden wird in der Industrie häufig nicht modellbasiert, sondern z. B. heuristisch vorgegangen. Ein Grund ist der hohe Aufwand der Modellbildung, auch Modellierung genannt [LSBJ20]. Gerade bei sehr speziellen Anlagen, die nur in geringen Stückzahlen bis hin zu Einzelstückzahlen verkauft werden, ist die wirtschaftliche Umsetzung theoretisch anspruchsvoller Methoden schwierig. Dazu gehören Regalbediengeräte, Gurtförderer, Positioniersysteme der Intralogistik und Fördertechnik und Präzisionswerkzeugmaschinen. Das benötigte interdisziplinäre Expertenwissen erfordert hoch qualifiziertes und nur begrenzt verfügbares Personal für die Inbetriebnahme, was teilweise einen Engpass für den Verkauf der Produkte darstellt [Boh06].

Eine schwierige Frage ist, welche Systemeigenschaften / physikalischen Effekte mit modelliert werden müssen, um das Gesamtsystem genau wiederzugeben, bzw. vernachlässigt werden können. Verwandt ist die Frage, welche *Komplexität* (ggf. angebbare als eine oder mehrere *Ordnungszahlen*,

---

<sup>2</sup>Ein Parameter hat trotzdem eine physikalische Bedeutung, wenn er z. B. direkt einem Eingang zugeordnet werden kann, denn dann charakterisiert er den Einfluss dieses Eingangs.

z. B. die Anzahl der Zähler- und Nennerkoeffizienten einer Übertragungsfunktion (ÜTF)) das Modell haben sollte. Entscheidungen dazu kommen häufig eher durch „Bauchgefühl“, also durch subjektive Empfindungen zustande, sodass die Ergebnisse nicht reproduzierbar sind und sich dieses Wissen schlecht weitergeben und lehren lässt. Zumindest wird der Weg zu der verwendeten Modellstruktur selten ausführlich in Veröffentlichungen beschrieben [Bon06].

Die Definition eines Automatismus zur Modellerstellung mithilfe objektiver Kriterien wäre daher von großer praktischer Bedeutung. In der Literatur wird auch von *Struktur- und Parameteridentifikation* oder engl. *model selection, model structure identification* [SB94], *model structure optimization, system identification* [GLMS96] gesprochen, wobei sich diese Begriffe auch auf black-box Modelle beziehen können. Welche Eigenschaften ein „gutes“ Modell ausmachen, wird in den Abschnitten 1.1 und 1.3 betrachtet und ist anwendungsspezifisch.

Eine Schwierigkeit bei der Festlegung einer inneren Modellstruktur ist, dass grundsätzlich viele Gleichungen gefunden werden können, die das gleiche Ein- Ausgangsverhalten beschreiben, wenn die Parameter entsprechend gewählt werden [CG89]. Wenn aber aufgrund von begrenztem Vorwissen eine endliche Menge potentieller Modelle vorliegt, ist es denkbar, dass bei einfachen Problemen eines dieser Modelle die beste Übereinstimmung mit der Messung zeigt und somit die Frage nach dem besten Modell beantwortet werden kann. Die Frage nach der Eindeutigkeit bzw. *Unterscheidbarkeit* von Modellen sollte in jedem Fall untersucht werden.

Obwohl mechatronische Systeme sich in verschiedenen Disziplinen finden, beschränkt sich diese Arbeit auf den elektrischen Antriebsstrang, d. h. den primären linearen oder rotatorischen Elektromotor und die Eigenschaften der angekoppelten Hardware, also Reibung, Elastizitäten, Lose u. a. Der Grund dafür ist das große Interesse der Industrie in diesem Bereich.

## 1.1 Stand der Wissenschaft

Es folgt ein grober Literaturüberblick zu bisherigen Arbeiten und zum aktuellen Stand des Wissens, um in Abschnitt 1.3 das Ziel dieser Arbeit zu benennen. Zu einzelnen Aspekten werden in den nachfolgenden Kapiteln noch weitere Literaturstellen zitiert. Abschnitt 1.1.1 nennt Quellen, die das Thema von verschiedenen Perspektiven angehen, während Abschnitt 1.1.2 speziell auf Kriterien der automatischen Modellauswahl eingeht. In Abschnitt 1.1.3 werden die Probleme aufgelistet, die sich durch die Automatisierung ergeben.

### 1.1.1 Verwandte Arbeiten und Abgrenzung zu dieser Arbeit

Reine Parameteridentifikationen bei vorgegebenem phänomenologischen Modell sind für die hier betrachteten Systeme durchaus häufig zu finden, z. B. [CHY02; Vil07; Sch03; ILZ+03]. Dies bestätigt die Relevanz und Wichtigkeit dieser Modelle. Ein Beispiel für die weitere Verwendung ist die Arbeit [TGK20], in der eine *flachheitsbasierte Vorsteuerung* an einem Dreimassenschwingermodell

eines elektrischen Antriebsstrangs ausgelegt wird. Kalmanfilterung für Zweimassenschwinger und Dreimassenschwinger wurde ebenfalls betrachtet [TGJ; Bec17].

Werden andere Domänen hinzugenommen, so finden sich auch viele Arbeiten zur Strukturoptimierung, z. B. [BA98; ACC01; SBWT96; GWM+97; ACC01; MAS04; WAW04; HMC+08; SP09]. Häufige Anwendungen sind in Biochemie [VMRK96] und Finanzen [Dra95] zu finden. Allerdings sind die Modelle dabei meist linear in den Parametern, sodass letztere leicht einbezogen oder ausgeschlossen werden können. Bei physikalisch interpretierbaren Modellen, welche komplizierter und nichtlinear in den Parametern sind, müssen Entscheidungen über Teilmodelle getroffen werden und nicht über einzelne Parameter. Ein Teilmodell beschreibt einen bestimmten physikalischen Effekt, z. B. Reibung oder Schwerkraft, und umfasst i. Allg. mehrere Parameter.

Dieser Schwierigkeit wird z. B. mit der *genetischen Programmierung* begegnet. Dabei werden zufällige Kombinationen aus Teilmodellen auf Übereinstimmung mit der Messung getestet. Durch genetische Operationen (Rekombination, Mutationen, Selektion) wird erreicht, dass sich mit der Zeit tendenziell die besten Kombinationen durchsetzen [Koz94; SP09]. Parameter, die kontinuierliche Werte annehmen können, werden bei der klassischen genetischen Programmierung auf endlich viele Werte beschränkt und so ebenfalls durch diskrete Entscheidungen mit optimiert [Koz94; WAW04]. In der Arbeit von Marenbach et al. [MBC95; MBF96] wird genetische Programmierung zur Strukturoptimierung verwendet. Als zu kombinierende Operatoren stehen einfache Übertragungsfunktionen, z. B.  $P_{T1}$ -Elemente,  $P_{T2}$ -Elemente, Totzeitglieder, Eingänge u. a. als „Modellbausteine“ zur Verfügung. Bevor ein Modell bewertet werden kann, ist zunächst eine Parameteridentifikation erforderlich. In [GLMS96; GWM+97] wird ein ähnlicher Ansatz verfolgt, jedoch für Blöcke, die sich nicht zwangsläufig als Übertragungsfunktion darstellen lassen. Dazu werden Simulink Simulationsmodelle verwendet.

In der Anwendung der elektrischen Antriebsstränge gibt es nur wenige Arbeiten zur automatischen Auswahl dynamischer Modelle. Schütte et al. [SBG+97; Sch03] stellen verschiedene Versuche vor, die bei der Entscheidung helfen können, ob z. B. Lose berücksichtigt werden muss. Der Prozess ist aber nicht voll automatisch und die endgültige Entscheidung wird dem Bediener überlassen. In [BV03] wird ein physikalisch motiviertes Modell eines Motors mit einem *radial basis function*-basierten black-box Modell für die statische Reibung kombiniert. Es wird eine Methode zur Bestimmung der optimalen Modellkomplexität des black-box Modells angewandt. Das physikalisch motivierte Modell wird jedoch nicht umfangreich hinsichtlich seiner Struktur optimiert und der mechanische Teil des Modells ist, abgesehen von dem Massenträgheitsmoment, rein statisch und durch seine parameterlineare Form leicht zu identifizieren.

### 1.1.2 Übergang von der Parameteridentifikation zur Modellauswahl

Wie aus dem vorherigen Abschnitt schon hervorgeht, erfordert die Auswahl parametrierter Modelle in fast allen Fällen, dass erst mehrere Modelle identifiziert werden und dann die Kostenfunktion der Identifikation für die eigentliche Auswahl verwendet wird. Eine häufige Kosten-



funktion ist die Summe der Fehlerquadrate. Beim Vergleich mehrerer Modelle unterschiedlicher Modellordnungen/-komplexitäten, d. h. unterschiedlicher Parameterzahlen ist allerdings das sog. *Bias-Varianz-Dilemma* zu berücksichtigen: Wird davon ausgegangen, dass sich die Messung aus einem deterministischen, nicht direkt messbaren Teil  $\tilde{y}_0$  und einem stochastischen Teil  $v$  additiv zusammensetzt,  $y_0 = \tilde{y}_0 + v$ , so lässt sich der aus der Identifikation resultierende Fehler des Modells  $\hat{y}$  folgendermaßen zerlegen [Kay93]:

$$\begin{aligned} E[(\hat{y} - \tilde{y}_0)^2] &= E[((\hat{y} - E[\hat{y}]) + (E[\hat{y}] - \tilde{y}_0))^2] \\ &= E[(\hat{y} - E[\hat{y}])^2 + (E[\hat{y}] - \tilde{y}_0)^2 + 2E[(\hat{y} - E[\hat{y}]) \cdot (E[\hat{y}] - \tilde{y}_0)] \\ &= \text{var}(\hat{y}) + (E[\hat{y}] - \tilde{y}_0)^2 \\ &= \text{var}(\hat{y}) + \text{bias}^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dabei steht  $E$  für den Erwartungswert und  $\text{var}$  für die Varianz. Es wurde ausgenutzt, dass  $\tilde{y}_0$  keine stochastische Größe ist. Je größer die Parameterzahl  $N_\theta$ , desto kleiner wird tendenziell der deterministische Biasfehler,  $\text{bias}$ , weil das Modell die Realität genauer abbildet. Allerdings vergrößert sich der Varianzfehler, weil sich das Modell flexibel an das Messrauschen anpasst, wodurch bei zunehmender Parameterzahl der gesamte Modellfehler schließlich wieder zunimmt.

Da  $E[(\hat{y} - \tilde{y}_0)^2]$  nicht direkt messbar ist, müssen bestimmte Kostenfunktionen wie *Akaike Information Criterion* (AIC),  $AIC_c$  [BA98] oder *Final Prediction Error* (FPE) [SS89] als Bewertungskriterien für den Vergleich mehrerer Modelle verwendet werden. Sie ergänzen das gemessene Residuum an Trainingsdaten um einen zusätzlichen Korrekturterm. Das Residuum alleine würde den gesuchten Wert unterschätzen und zu übermäßig komplexen Modellen führen (*Overfitting*).

Ein anderer Ansatz ist es, das Residuum an einem separaten Validierungsdatensatz zu bestimmen, z. B. mit der *Kreuzvalidierung* [JWHT13]. Dadurch entsteht ein Wert für  $(y_0 - \hat{y})^2$ , der sich im Erwartungswert

$$E[(\hat{y} - y_0)^2] = E[(\hat{y} - \tilde{y}_0)^2] + E[v^2]. \quad (1.2)$$

nur um einen konstanten Offset von dem gesuchten Ausdruck  $E[(\hat{y} - \tilde{y}_0)^2]$  unterscheidet [HAOR15].

Weiterhin ist es gängig, zur Bestimmung der optimalen Modellkomplexität Hypothesentests durchzuführen, bei denen mehrfach ein komplexes Modell mit einer Vereinfachung verglichen wird. Nur wenn die Vereinfachung mit großer Sicherheit (Irrtumswahrscheinlichkeit z. B. 5 %) widerlegt werden kann, wird das komplexere Modell genommen [BA98].

Außerdem existieren Methoden zur Analyse der Residuen. Wenn diese nicht näherungsweise der angenommenen Verteilung entsprechen, wird davon ausgegangen, dass das Modell die Realität nicht vollständig abbildet. Die Annahmen zur Verteilung beziehen sich typischerweise auf die Unabhängigkeit einzelner Messpunkte und auf die Form der Verteilung [Ise13].

Neben der Genauigkeit des Modells können auch Eigenschaften wie Recheneffizienz, Verträglichkeit mit physikalischen Gleichungen, Unterstützung beim Systemverständnis und Robustheit gegenüber kleinen Änderungen wichtig sein [Bon06]. Die Forderung nach Systemverständnis und Verträglichkeit wird folgendermaßen zusammengefasst: „If the model does not help us decide how to answer questions about the primary system or how it fits into the world, the model may be of little value.“, [Bon06], S. 6. Es sei sogar denkbar, dass ein komplexeres Modell gewählt wird, weil dieses besser mit der Theorie vereinbar ist und sich besser zur Kommunikation der Ergebnisse eignet [Bon06]. Solche Eigenschaften lassen sich allerdings schwieriger mit einer Kostenfunktion erfassen als die Genauigkeit. Dies trägt dazu bei, dass die Modellauswahl gegenüber einer reinen Parameteridentifikation zusätzliche Schwierigkeiten beinhaltet, wie im nächsten Abschnitt genauer analysiert.

### 1.1.3 Bekannte Probleme bei der Struktur- und Parameteridentifikation

Durch die Erweiterung der reinen Parameteridentifikation um eine Modellauswahl ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten. Die aus der Literatur bekannten Probleme lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die manuelle Modellauswahl lässt sich nicht leicht automatisieren, weil sie „Augenmaß“ erfordert und schwer beschreibbare Tätigkeiten beinhaltet wie die Erkennung von charakteristischen Antworten und Ausreißern [Nel01]. Rein objektive Kriterien wären zu unflexibel [Cha95].
2. Parameteridentifikation als Teil der Modellauswahl erfordert im nichtlinearen Fall manchmal Benutzerinteraktion, was die Integration in eine vollautomatische Kette von Werkzeugen erschwert [Nel01].
3. Rauschen, Ausreißer, usw. können zu Scheinkorrelationen mit trügerisch guten Übereinstimmungen führen. Je mehr Modelle getestet werden, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines zufällig passt [BA98].
4. Es gibt Probleme mit der Eindeutigkeit, auch dann, wenn theoretisch immerhin ein gewisser Unterschied zu sehen sein müsste [SB94; Cha95].
5. Die Rechenzeit der Identifikation vervielfacht sich [Nel01].
6. Manchmal bestimmt der Modellzweck so stark die Anforderungen an das Modell, dass nur beides parallel entwickelt werden kann und nicht zuerst vollständig das Modell, z. B. modellbasierte Reglerauslegung [Han05].
7. Die schwellwertbasierten Entscheidungen über die Akzeptanz von Modellen führen zu einer starken Abhängigkeit von willkürlich gewählten Hyperparametern [Bon06].

Der Abschnitt 1.3 gibt an, welche der Punkte in dieser Arbeit adressiert werden sollen.

## 1.2 Fazit zur Literaturübersicht

Die kurze Literaturübersicht hat gezeigt, dass zwar viele Arbeiten zur automatischen Auswahl von Modellen existieren, dass aber nur wenige alle Komplexitäten berücksichtigen, die in der hier betrachteten Anwendung zusammenkommen (Nichtlinearitäten in den Parametern, komplexe Verschaltung von Teilmodellen (nicht darstellbar als Multiplikation, s. u.), Zweckgerichtete Modelloptimierung). Letzteres bedeutet, dass nicht nur die Genauigkeit optimiert wird, sondern weitere Anforderungen berücksichtigt werden.

Außerdem existieren zwar viele theoretische Arbeiten, doch es gibt offene Fragen zur genauen Umsetzung. Zum Beispiel ist die zu erwartende Rechenzeit wichtig für den Nutzen, ebenso wie die Unterscheidbarkeit der Modelle. Es ist auch offen, wie ein Satz potentieller Modelle in der betrachteten Anwendung aussehen könnte, sodass zwar vertiefte Einblicke in das System zustande kommen, aber das Problem nicht unbeherrschbar komplex wird.

## 1.3 Zielsetzung und Gliederung der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, die Methoden der Modellauswahl in Bezug auf die Herausforderungen der gegebenen Anwendung weiter zu entwickeln und einen Beitrag zu der Frage zu leisten, ob die Struktur- und Parameteridentifikation bei elektrischen Antriebssträngen als ein lösbares Problem mit einem gewissen Nutzen formuliert werden kann.

Da aber die Schwierigkeiten solcher Bestrebungen bekannt sind, siehe Abschnitt 1.1.3, liegt der Fokus nicht auf der Recherche komplexer Modelle, sondern auf der Kombination weit verbreiteter und einfacher Modelle. Die stochastischen Kriterien zur Bestimmung der optimalen Modellkomplexität auf Basis des Residuums an Trainingsdaten sollen nicht im Vordergrund stehen, weil dieses Problem gut bekannt ist und durch Training und Validierung an separaten Daten umgangen werden kann. Außerdem hat sich in Vorversuchen gezeigt, dass oft viel größere Unterschiede zwischen Trainings- und Validierungsdaten bestehen als es durch Sensorrauschen erklärt werden könnte, insb. wenn unterschiedliche Trajektorien zur Anregung verwendet werden.

Die folgenden zwei alternativen Anforderungen an das resultierende Modell werden separat untersucht:

- Es soll eine physikalische Erklärung für das gemessene Ein-/Ausgangsverhalten liefern, wobei der Detailgrad (nur) so groß sein sollte wie es die gegebene Messung erlaubt.
- Es soll ein physikalisch motiviertes Modell sein, das die Reglerauslegung am Modell, anstatt am realen System erlaubt.

Die erste Anforderung ergibt sich als logische Konsequenz aus der Suche nach einem physikalisch motivierten Modell, denn dieses sollte nur so detailliert sein, dass die Modellstruktur noch glaubhaft aus Vorwissen und Messungen hergeleitet werden kann. Dies kann konkret bedeuten, dass die

Modellparameter identifizierbar sein müssen, damit sie keine zufälligen, grob falschen Werte annehmen, wie in Kapitel 3 gefordert. Auch kann es bedeuten, dass die Modellstruktur eindeutig sein muss, was in Kapitel 4 thematisiert wird. Diese beiden Ansätze werden hier separat behandelt, weil nicht in jedem Anwendungsfall beide Anforderungen von Interesse sind. Außerdem sind unterschiedliche Sätze von Modellkandidaten zu berücksichtigen (viele vs. wenige, linear vs. nichtlinear, usw.). Die Auswertungen in Kapitel 3 leisten einen Beitrag zu Punkt 4 in Abschnitt 1.1.3. Außerdem wird Problem 7 gezielt untersucht, wenn auch nicht gelöst.

Die zweite Anforderung ist Gegenstand von Kapitel 5. Durch die Forderung nach „regelungstechnischer Relevanz“ ergibt sich eine Bewertungsmetrik für die Genauigkeit des Modells, die eine Verschmelzung von Identifikation und Reglerauslegung mit sich bringt. Es werden zwei Ansätze zur Begegnung des Problems 6 im Detail ausgearbeitet und verglichen. Die primäre Fragestellung des Kapitels 5 ist, ob durch die zielorientierte Identifikation und Modellauswahl ein Vorteil gegenüber den besser bekannten Kostenfunktionen besteht.

Die weiteren Kapitel gliedern sich wie folgt: In Kapitel 2 werden die für Experimente verwendeten Prüfstände kurz vorgestellt und es wird das „Baukastensystem“ beschrieben, mit dem in den weiteren Kapiteln die Modelle generiert werden. In Kapitel 6 schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung und mit einem Ausblick.

## 2 Prüfstände und mögliche Modelle

In diesem Kapitel werden zunächst in Abschnitt 2.1 die in den Versuchen verwendeten Prüfstände vorgestellt. Anschließend erfolgt eine Beschreibung der betrachteten physikalischen Effekte und zugehörigen Teilmodelle und die Integration in ein Gesamtmodell (Abschnitt 2.2). Darauf aufbauend gibt Abschnitt 2.3 kombinatorische Überlegungen wieder, um eine sinnvolle Variantenvielfalt generieren zu können.

### 2.1 Vorstellung der Prüfstände

Als Prüfstände werden ein Regalbediengerät (Abbildung 2.1) und ein linearer Riemenantrieb (Abbildung 2.2) verwendet.

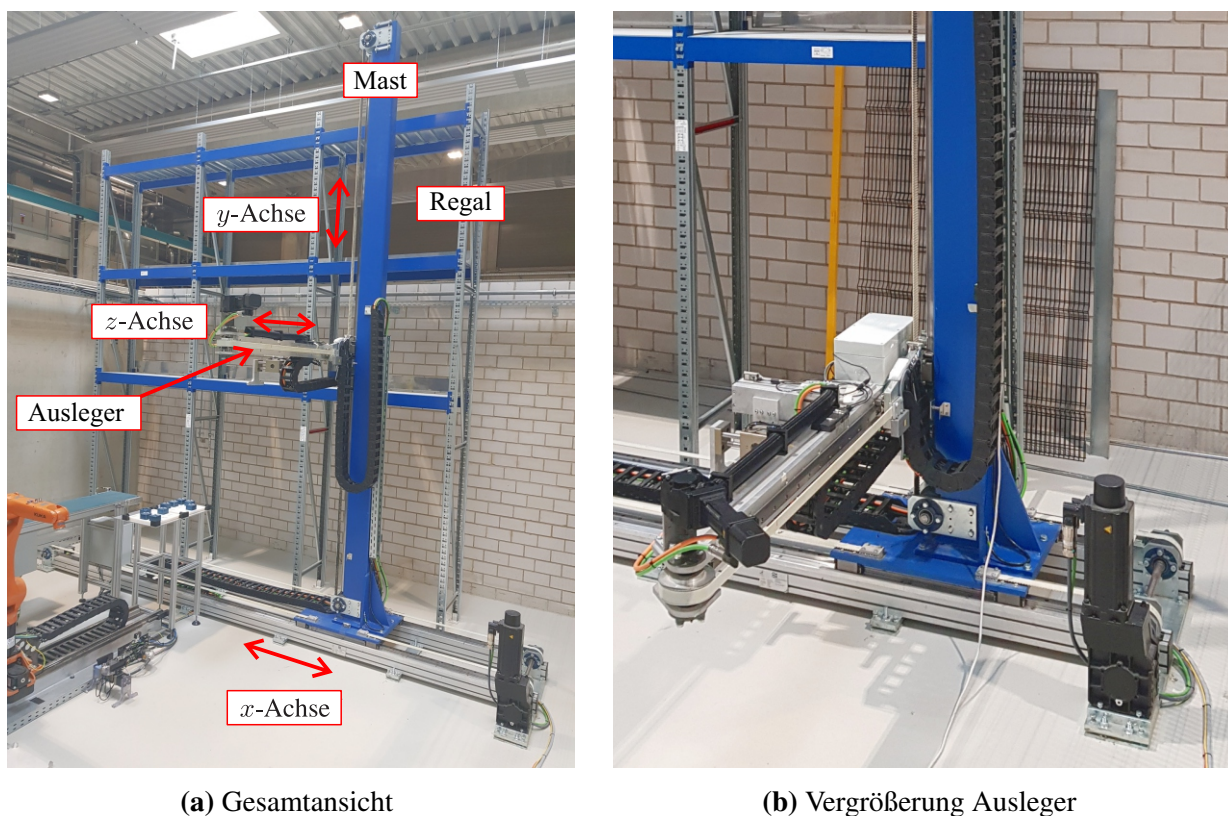
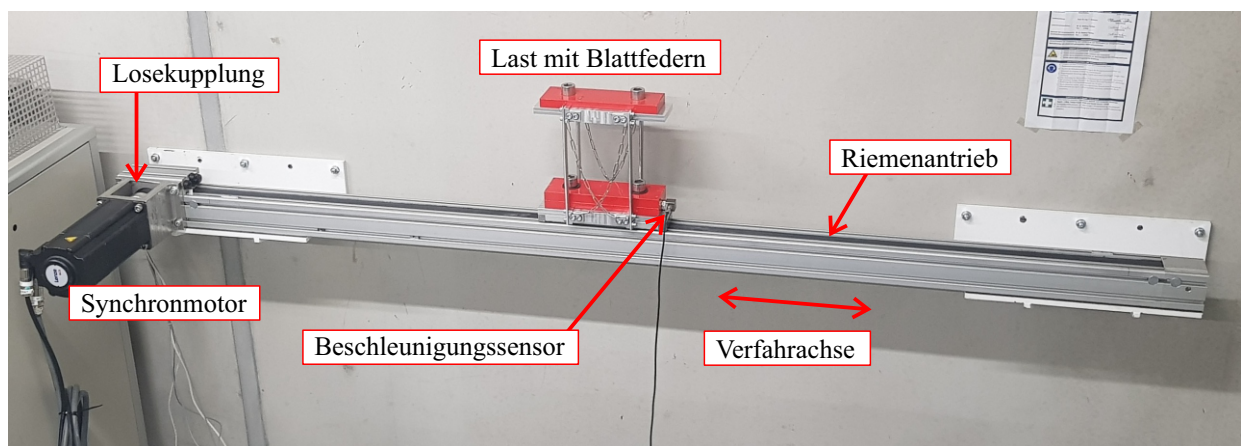


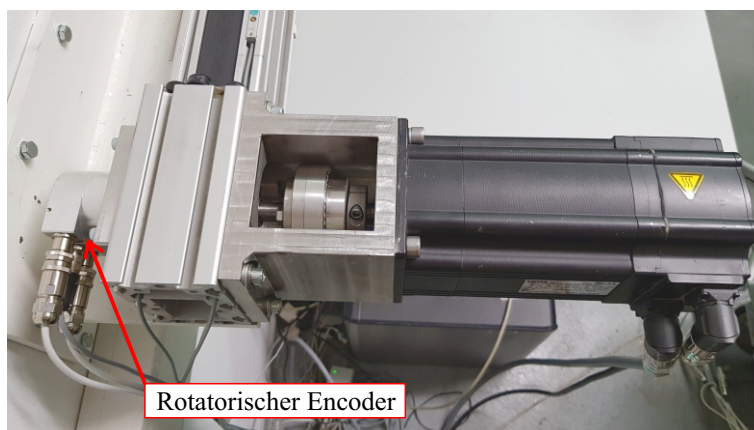
Abbildung 2.1: Prüfstand Regalbediengerät (RBG)

Das **Regalbediengerät (RBG)** ist in Abbildung 2.1 gezeigt und verfügt über drei orthogonale Achsen ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Der Motor der  $x$ -Achse ist ortsfest und über ein Schneckengetriebe sowie eine

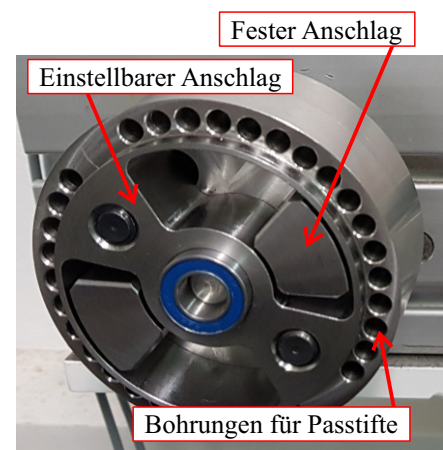
Klauenkupplung mit zwei Umlenkrollen verbunden, die zwei parallele, umlaufende Zahnriemen antreiben. Die Zahnriemen bewegen den horizontal geführten Schlitten, auf dem der Mast montiert ist, über eine Strecke von 4,5 m. Der Motor der  $y$ -Achse ist am unteren Ende des Mastes angebracht und bewegt den Ausleger ebenfalls über Getriebe, Klauenkupplung und umlaufenden Riemen. Der Verfahrweg beträgt 4,4 m. Bei der  $z$ -Achse handelt es sich auch um einen umlaufenden Riemen, allerdings bewegt sich der Motor mit, wenn der Ausleger, auch Teleskop genannt, in das Regal hineinfährt. Hier beträgt der Verfahrweg 1,7 m. Alle Motoren sind Getriebemotoren der Firma Lenze, welche über Umrichter vom Typ i700, ebenfalls von Lenze, angesteuert werden. Die genauen Bezeichnungen der Motoren und weitere Kennwerte der Antriebe sind in [Bec17] zu finden.



(a) Gesamtansicht



(b) Vergrößerung Motor, Losekupplung und Encoder



(c) Abtriebsseitiger Teil der Losekupplung

Abbildung 2.2: Prüfstand Einzelachse

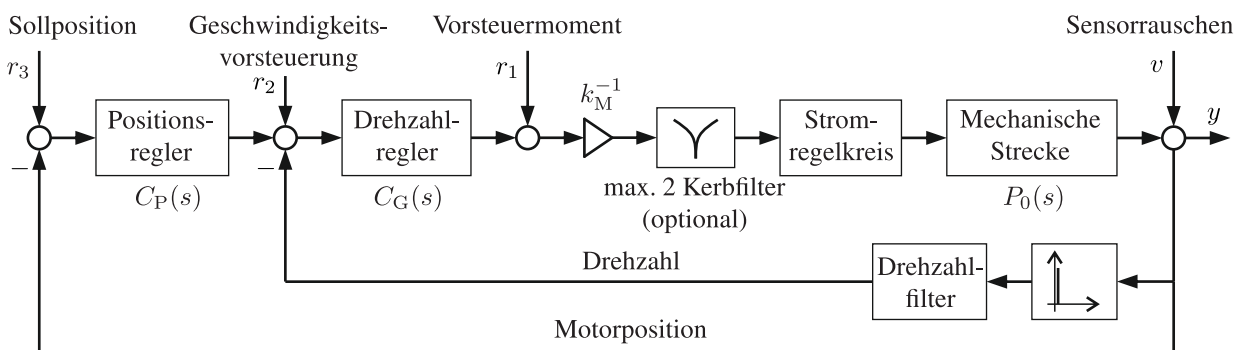
Der zweite Prüfstand, genannt **Einzelachsprüfstand**, **Einachsprüfstand** oder **Linearachsprüfstand**, ist in Abbildung 2.2 gezeigt und beinhaltet ein Riemenantriebssystem für Positionieranwendungen mit einer Verfahrlänge von 1,7 m [Bec17]. Er wird über einen Synchronmotor vom Typ

MCS 12L20 der Firma Lenze mittels einer Kupplung mit einstellbarer Lose und ohne Getriebe aktuiert. Der Umrichter ist vom Typ 9400 von Lenze.

Die Losekupplung erlaubt eine schrittweise Einstellung der Lose von  $0^\circ$  bis  $20^\circ$  und folgt dem Prinzip, das in [Vil07] beschrieben ist. In dieser Arbeit wird die Losekupplung jedoch nur in zwei verschiedenen Einstellungen verwendet. Hinter der Losekupplung befindet sich zusätzlich ein absoluter optischer Encoder der Firma Baumer (ATD 2B A 4 Y2617) mit EtherCAT-Anbindung, sodass die tatsächliche Loseweite überprüft werden kann.

Die bewegte Last besteht aus zwei einzelnen Massen, die über Blattfedern miteinander gekoppelt sind. Oben und unten kann die Anzahl der roten Stahlblöcke variiert werden, wobei ein Stahlblock 3 kg wiegt. In dieser Arbeit wird nur die gezeigte Konfiguration verwendet, d. h. unten zwei Stahlblöcke, oben einer.

Alle Motoren werden über die in Abbildung 2.3 vereinfacht dargestellte Kaskadenregelung mit PI-Geschwindigkeitsregelung und P-Positionsregelung geregelt. Zusätzlich ist es möglich, bis zu zwei Kerbfilter sowie Geschwindigkeits- und Momentenvorsteuerung zu parametrieren.



**Abbildung 2.3:** Vereinfachte Darstellung der Kaskadenregelung aller Motoren der Prüfstände. Zur Umrechnung von Drehmoment und Strom dient die Motorkonstante  $k_M$ .

## 2.2 Teilmodelle und Integration in ein Gesamtmodell

Strukturoptimierung meint die diskrete Optimierung der Zusammensetzung eines Modells aus *Teilmodellen*. Mit den Teilmodellen werden bekannte *physikalische Effekte / physikalische Eigenschaften* assoziiert. Es wird auch von *Prozesselementen* gesprochen [Ise08]. Ein bestimmtes Teilmodell kann keinmal, einmal oder ggf. auch mehrfach vorhanden sein, z. B. Reibung an mehreren Orten. Das Verhalten des Gesamtmodells ist durch die enthaltenen Teilmodelle und deren Parameter definiert.

Im Folgenden wird zunächst allgemein auf die hier verwendete domänenunabhängige Methodik der Kombination von Teilmodellen zu einem Gesamtmodell eingegangen. Danach werden die in dieser Arbeit betrachteten Teilmodelle angegeben und die Integration in das Gesamtmodell erläutert. Die Ergebnisse wurden teilweise in dem Paper [TPWob] veröffentlicht.

### 2.2.1 Baukasten-Modellierung

Um den Prozess der Modellierung und Strukturerkennung automatisieren zu können, ist es eine Grundvoraussetzung, dass sich die potentiellen Modelle aus Teilmodellen zusammensetzen lassen, welche wiederum für bestimmte physikalische Effekte stehen. Dies sollte ohne manuelle Anpassung möglich sein. Im Idealfall muss für jedes Teilmodell nur die Häufigkeit und Anordnung angegeben werden und daraus ergibt sich automatisch das Gesamtmodell. Damit sich das Konzept wie ein erweiterbarer „Baukasten“ verhält, ist es wichtig, dass die Bausteine (Teilmodelle) ihre eigene Funktionalität vollständig definieren, während der übergeordnete Mechanismus kein domänenspezifisches Wissen enthält und bei Anpassungen und Erweiterungen nicht verändert werden muss. Die Bausteine dürfen durchaus aufeinander abgestimmt und als ein Gesamtkonzept entworfen sein. Existierende Software zur Modellierung dynamischer Systeme wie Simulink oder Dymola wäre eher für die manuelle Modellierung geeignet, weil zusätzliche Informationen über die geometrische Anordnung verarbeitet werden und weil die grafische Oberfläche die Generierung der Modelle verlangsamt. Außerdem beschränken sich diese Programme auf die Verschaltung von Teilmodellen über Ein- und Ausgänge, was die Flexibilität reduziert.

Ein für die automatische Modellerstellung optimiertes Konzept findet sich in [Boh06], genannt *Mo-CaVa*, basierend auf dem Software-Werkzeug *IdKit*. Hierbei werden Teilmodelle im einfachsten Fall über ihre Eingänge und Ausgänge miteinander verschaltet. Zusätzlich ist es möglich, dass interne Parameter eines Teilmodells durch dynamische Modelle ersetzt werden, sodass eine verschachtelte Struktur entsteht und nicht lediglich Ein- und Ausgänge verwendet werden. Die nachträgliche Modifikation von Zustandsfunktionen ist aber schwer damit umsetzbar und unstetige Funktionen wie COULOMB'sche Reibung und Lose dürfen nicht enthalten sein, weil für die Identifikation und statistische Auswertungen Gradienten berechnet werden.

In dieser Arbeit wird daher eine relativ einfache Eigenlösung mit begrenztem Funktionsumfang verwendet. Im Folgenden wird dieses generische Konzept zunächst allgemein beschrieben, bevor in Abschnitt 2.2.2 auf die tatsächlich umgesetzten Teilmodelle eingegangen wird. Ausgangsbasis ist eine Zustandsraumdarstellung (ZRD) mit linearem und nichtlinearem Teil, wie in Abbildung 2.4 gezeigt, in die sich die Teilmodelle bei Aufruf integrieren. Die Matrizen  $A_Z$ ,  $B_Z$ ,  $C_Z$  und  $D_Z$  stellen den linearen Teil dar, die Funktionen  $f_{nl}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  und  $g_{nl}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  den nichtlinearen Teil. Am Ein- und Ausgang ist Totzeit vorgesehen<sup>1</sup>. Die Trennung in linearen und nichtlinearen Teil vereinfacht es, bei rein linearen Modellen lineare Funktionen zu verwenden.

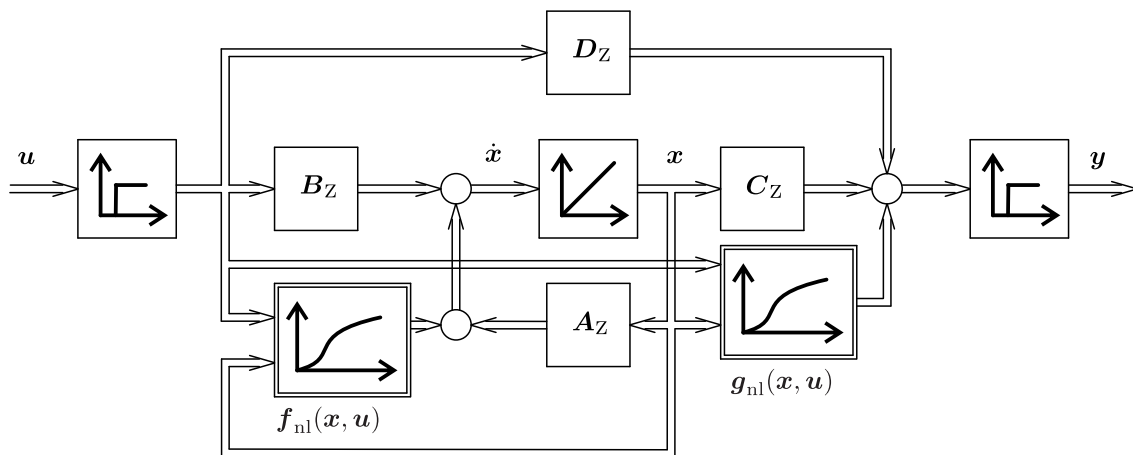
Zu Beginn ist die Zustandsraumdarstellung leer und hat keine Zustände. Dann werden die Teilmodelle in einer bestimmten Reihenfolge hinzugefügt, sofern sie enthalten sein sollen.

Beim Hinzufügen integrieren sich die Teilmodelle durch Aufrufen von Funktionen zur Manipulation der ZRD:

---

<sup>1</sup>Bei Systemen mit nur einem Eingang und Ausgang kann auf eine der beiden Totzeiten verzichtet werden.





**Abbildung 2.4:** Zustandsraumdarstellung der Baukastenmodellierung mit linearem und nichtlinearem Teil sowie eingangs- und ausgangsseitiger Totzeit

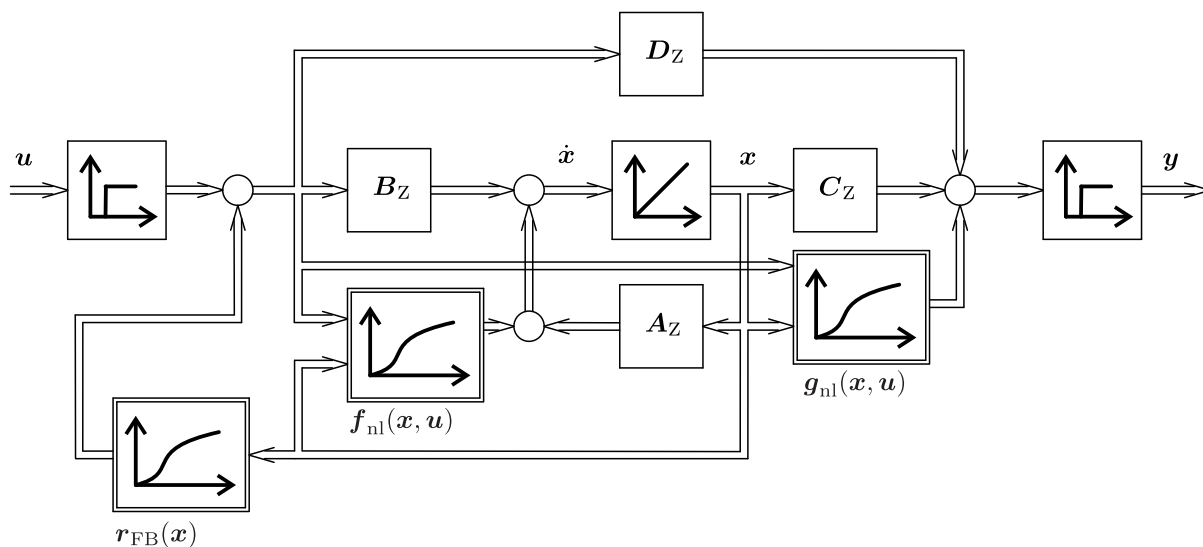
- Addieren auf Teile der Matrizen, der System- und Ausgangsfunktion, oder Ersetzen vorhandener Ausdrücke,
- Matrixmultiplikation an Eingang oder Ausgang,
- Hinzufügen von Zustandsrückführungen auf den Systemeingang,
- Parallelschaltung oder Reihenschaltung von Zustandsraumdarstellungen,
- Hinzufügen oder Ersetzen von Zuständen.

Dabei bleibt die Struktur, wie in Abbildung 2.4 gezeigt, erhalten. Wird beispielsweise eine nichtlineare Zustandsrückführung auf die Eingänge hinzugefügt, so ergibt sich zunächst durch die Rückführung eine Struktur wie in Abbildung 2.5 (die Totzeit am Eingang außen vor gelassen). Die nichtlineare Rückführung wird dann in die Systemfunktion und Ausgangsfunktion integriert:

$$\begin{aligned} f_{nl}(x, u) &\rightarrow f_{nl}(x, u + r_{FB}(x)) + B_Z r_{FB}(x), \\ g_{nl}(x, u) &\rightarrow g_{nl}(x, u + r_{FB}(x)) + D_Z r_{FB}(x). \end{aligned}$$

Dies ersetzt den Rückführungsblock und es ergibt sich wieder eine Struktur wie in Abbildung 2.4. Bei der linearen Rückführung ist das Vorgehen analog.

Zudem haben die Teilmodelle die Möglichkeit, gezielt einen Ausschnitt aus der existierenden ZRD zu adressieren, auf den sich die weiteren Operationen beziehen sollen. Auf diese Weise ist es möglich, einen Teil des Modells zu bearbeiten, ohne den Aufbau des vollständigen Modells, insb. die Reihenfolge der Zustände, zu kennen. Über die Namen der beteiligten Eingänge, Zustände



**Abbildung 2.5:** Zustandsraumdarstellung erweitert um nichtlineare Zustandsrückführung  $r_{\text{FB}}$ .

und Ausgänge in  $\mathbf{u}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{red}}$  und  $\mathbf{y}_{\text{red}}$  werden die *reduzierten* Matrizen  $\mathbf{A}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{D}_{\text{red}}$  und Funktionen  $f_{\text{red}}$ ,  $g_{\text{red}}$  definiert. Zum Beispiel würde bei der ZRD

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix},$$

die Definition der reduzierten Eingänge, Zustände und Ausgänge

$$u_{\text{red}} = F_1, \quad \mathbf{x}_{\text{red}} = (q_1, q_2)^T, \quad y_{\text{red}} = \dot{q}_1$$

zur Adressierung der in Abbildung 2.6 rot hervorgehobenen Einträge führen.

$$\mathbf{A}_Z = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \mathbf{B}_Z = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}, \mathbf{C}_Z = \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \mathbf{D}_Z = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

**Abbildung 2.6:** Adressierung von Teilmatrizen durch Beschränkung auf ausgewählte Eingänge, Zustände und Ausgänge. Die adressierten Elemente sind rot hervorgehoben.

Basierend auf diesem allgemeingültigen Konzept sollen nun die domänenspezifisch gewählten Teilmodelle definiert werden.

### 2.2.2 Betrachtete Teilmodelle

Die folgende Auflistung führt die physikalischen Effekte, die in dieser Arbeit berücksichtigt werden, kurz ein und gibt die zugehörigen Teilmodelle an. Dabei werden diese in der Reihenfolge beschrieben, in der sie einzubinden sind. Die genaue Zerlegung in Teilmodelle ist willkürlich gewählt und an das gegebene Problem angepasst. Sie müsste ggf. neu festgelegt werden, wenn Erweiterungen auf bisher unberücksichtigte Effekte vorgenommen werden sollen.

Verfeinerungen und Erweiterungen wären zwar möglich, aber im Hinblick auf die Unterscheidbarkeit wird abgeschätzt, dass die gewählte Variantenvielfalt angemessen ist. Außerdem sind die in der Literatur gängigsten Effekte enthalten [SBG+97; WBF+99; ZF00a; ZF00b; CHY02; Zem12; Tho13; LD16; Bec17]. Die tatsächlich betrachteten kombinatorischen Möglichkeiten werden im Zusammenhang mit den durchzuführenden Versuchen noch genauer angegeben. Auch beschränken sich die Ansätze auf Systeme mit einem Aktor und einfache Kinematiken ohne dynamische Kopplungen zwischen den Achsen. Folglich können keine mehrachsigen Modelle von Robotern o. ä. identifiziert werden. Die Erweiterbarkeit wird später noch diskutiert.

Zur Berücksichtigung von Vorwissen sind Parameter, die sich leicht aus einem Datenblatt ablesen lassen oder die nur diskrete Werte annehmen, fest vorzugeben. Zur Unterscheidung davon werden die zu identifizierenden Parameter als *Schätzparameter* bezeichnet.

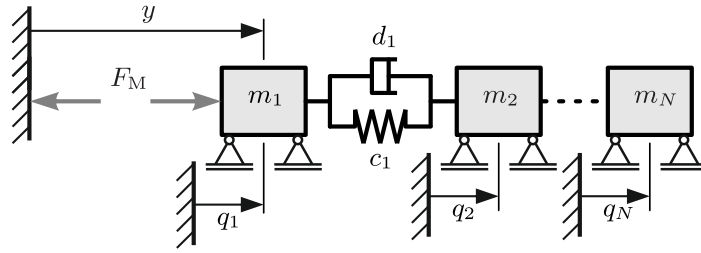
**Mehrmassensysteme mit Feder-Dämpfer-Elementen:** Durch die Verbindung von Massen mit Feder-Dämpfer-Elementen<sup>2</sup> entstehen Mehrmassenschwinger, wie beispielhaft in Abbildung 2.7 gezeigt. Sie sind weniger komplex als Kontinuumsschwinger, können aber doch die wesentlichen Effekte wie Resonanz, selbsterregte Schwingung, Tilgung, usw. nachbilden. Außerdem verhalten sich viele Systeme tatsächlich näherungsweise wie elastisch gekoppelte diskrete Massen, wenn beispielsweise ein Riemen die Elastizität darstellt und der Rotor eines Motors die erste Masse.

In Abbildung 2.7 ist der translatorische Fall gezeigt, aber äquivalent können die Systeme auch rotatorisch sein. Entsprechend ist beispielsweise  $q_i$  entweder ein Winkel oder eine Position. Um die Variantenvielfalt überschaubar zu halten, werden Effekte, die durch kombiniert rotatorische und translatorische Bewegungen zustande kommen, nicht explizit als solche modelliert.

Relevante Parameter sind die Massen  $m_i$ , die *Ersatzfedersteifigkeiten* oder *spezifischen Federsteifigkeiten* der Federn, kurz Federsteifigkeiten oder Federkonstanten  $c_i$  und die Dämpfungskonstanten  $d_i$ . Ferner steht  $N \in \mathbb{N}^+$  für die Anzahl der Massen. Die Menge der Schätzparameter ist  $\{m_i, c_i, d_i\} \forall i$ , während eventuell vorhandene Umlenkstrahlen u. ä. als gegeben angesehen werden. In Abhängigkeit von  $N$  sind die Bezeichnungen Einmassensystem / Einmassenschwinger (EMS), und entsprechend auch ZMS, DMS und VMS gebräuchlich.

---

<sup>2</sup>Es wird ausschließlich die dargestellte parallele Feder-Dämpfer-Anordnung betrachtet (auch Kelvin-Voigt-Element genannt), weil diese Anordnung Strukturschwingungen repräsentiert. Die Hintereinanderschaltung (Maxwell-Modell) eignet sich eher zur Modellierung von Kunststoffen mit Kriechverhalten, o. ä. [Vöt07].



**Abbildung 2.7:** Beispiel für Mehrmassensysteme mit Motor (Kraft  $F_M$ ) und Positionssensor (Position  $y$ ) an der ersten Masse. Nur der translatorische Fall ist gezeigt. Die Anzahl der Massen ist  $N$ .

Zur Überführung in die Zustandsraumdarstellung wird in [TPWOb] der Weg verfolgt, dass Massenmatrix, Dämpfungsmatrix und Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems direkt definiert werden. Der Eingang des resultierenden MIMO-Systems ist ein Vektor aus  $N$  Kräften und der Ausgang enthält insgesamt  $3N$  Elemente für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung  $(\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T, \ddot{\mathbf{q}}^T)^T$ . Die tatsächlich verwendeten Sensoren und Aktoren werden später durch Eingangs- und Ausgangsauswahlmatrizen definiert.

Als eine alternative Gliederung in Teilmodelle oder als Ergänzung können sich auch die einzelnen Massen nacheinander dem existierenden System hinzufügen. Die Definition des Eingangs- und Ausgangsvektors gilt dabei unverändert. Nachfolgend sind die Schritte angegeben, die erforderlich sind, um eine neue Masse  $m_k$  über parallele Feder  $c_k$  und Dämpfer  $d_k$  mit der bereits existierenden Masse  $j$  als Ursprung zu verbinden<sup>3</sup>:

1. Neue Masse: Hinzufügen des Eingangs  $F_k$ , der Zustände  $q_k$  und  $\dot{q}_k$  sowie der Ausgänge  $q_k$ ,  $\dot{q}_k$  und  $\ddot{q}_k$  ohne Verbindungen
2. Beschränkung auf die neuen Eingänge, Zustände und Ausgänge

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = F_k, \quad \mathbf{x}_{\text{red}} = (q_k, \dot{q}_k)^T, \quad \mathbf{y}_{\text{red}} = (q_k, \dot{q}_k, \ddot{q}_k)^T \quad (2.1)$$

und Definition von

$$\mathbf{A}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\text{red}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m_k \end{pmatrix}.$$

Dies entspricht dem Hinzufügen einer Masse mit zugehörigen Zuständen ohne Verbindung zum restlichen System.

<sup>3</sup>Es wird von einem rein translatorischen oder rein rotatorischen System ausgegangen, wobei alle Positionen  $q_i$  den jeweiligen Massen zugeordnet sind und in die gleiche Richtung zeigen, vgl. Abbildung 2.7. Die Feder-Dämpfer-Elemente sind parallel zu der einheitlichen Bewegungsrichtung (z. B. horizontal) angeordnet. Allerdings weicht die Nummerierung ab und es sind Verzweigungen möglich.

## 3. Neues Feder-Dämpfer-Element: Beschränkung auf

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = (F_j, F_k)^T, \quad \mathbf{x}_{\text{red}} = (q_j, q_k, \dot{q}_j, \dot{q}_k)^T, \quad \mathbf{y}_{\text{red}} = (\ddot{q}_j, \ddot{q}_k)^T \quad (2.2)$$

(führt zu neuen  $\mathbf{A}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{red}}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{red}}$  und  $\mathbf{D}_{\text{red}}$ ) und Addition der linearen Zustandsrückführung  $-(\mathbf{C}, \mathbf{D})$  mit

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_k & -c_k \\ -c_k & c_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_k & -d_k \\ -d_k & d_k \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

4. Ausgangsmatrix aktualisieren:  $\mathbf{C}_{\text{red}} = \mathbf{A}_{\text{red}3-4}$  (gleiche Beschränkung wie im vorherigen Schritt). Die Notation 3 – 4 bedeutet, dass die Zeilen 3 bis 4 verwendet werden.

Bei der ersten Masse des Systems kann kein Ursprung angegeben werden und entsprechend ist  $j$  undefiniert. Dadurch entfallen im dritten und vierten Schritt alle Ausdrücke mit  $j$ , d. h.  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{A}_{\text{red}}$  und  $\mathbf{C}_{\text{red}}$  werden entsprechend kleiner.

Wie bereits geschrieben, entsteht durch dieses Vorgehen ein MIMO-System. Die vorhandenen Aktoren sowie Sensoren für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden später durch Auswahlmatrizen festgelegt.

**Statisches Reibmodell mit drei unabhängigen Komponenten:** Das Reibungsmoment kann in die drei Teile: viskose, COULOMB- und STRIBECK-Reibung unterteilt werden [Sch03]:

$$F_R(\dot{q}_i) = \underbrace{-g_v \dot{q}_i}_{\text{viskos}} - \underbrace{\tanh(f_{\text{tanh}} \dot{q}_i) [M_C + M_S e^{-\dot{q}_i / \dot{q}_{i,0}}]}_{\text{COULOMB und STRIBECK}}. \quad (2.4)$$

Die Verstärkung  $f_{\text{tanh}}$  wird als bekannter Parameter im Voraus so definiert, dass die Simulation stabil möglich ist. Es ergeben sich vier Schätzparameter:  $\{g_v, M_C, M_S, \dot{q}_{i,0}\}$ . Der Index  $i$  bestimmt die Masse  $m_i$ , auf welche die Reibung dieses Teilmodells einwirkt.

Die Reibkraft  $F_R$  wird als additive, nichtlineare Zustandsrückführung in das bisherige Modell integriert:

$$\tau_{\text{FB}} = F_R(x_{\text{red}}) \quad (2.5)$$

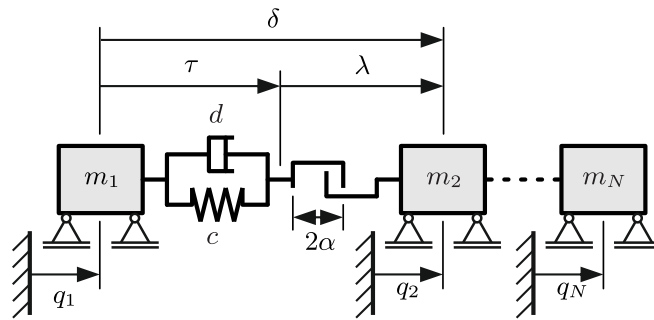
mit

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = F_i, \quad \mathbf{x}_{\text{red}} = \dot{q}_i.$$

**Schwerkraft:** Für die Berücksichtigung von Schwerkraft/Gravitation wird im translatorischen Fall eine konstante Kraft  $F_G$  auf eine der Massen  $m_i$  addiert, Schätzparameter  $\{F_G\}$ . Formell handelt es sich um eine nichtlineare Rückführung auf den Eingang, der zu der Masse gehört:

$$r_{\text{FB}} = F_G \quad \text{mit} \quad u_{\text{red}} = F_i. \quad (2.6)$$

**Lose:** Gemäß dem *physikalischen Losemodell* [NGG97; Zem12] erfolgt die Modellierung als Reihenschaltung aus Feder-Dämpfer-Element und dem eigentlichen Loseelement mit Breite  $2\alpha$ . In Abbildung 2.8 ist beispielhaft die Position zwischen der ersten und der zweiten Masse gezeigt, doch grundsätzlich können beliebige Feder-Dämpfer-Elemente um Lose erweitert werden. Die Koordinate  $\lambda \in [-2\alpha, 0]$  ist die Position im Losespalt, welche den Maximalwert im statischen Gleichgewicht annimmt, wenn  $\delta$  groß ist. Üblicherweise wird ein symmetrischer Bereich gewählt [Zem12], aber hier erleichtert der asymmetrische Bereich die Simulation, denn so entspricht der Zustand  $\lambda = 0$  einer praktisch reproduzierbaren Ausgangslage.



**Abbildung 2.8:** Mehrmassenschwinger mit Spiel zwischen der ersten und zweiten Masse

Wird das Feder-Dämpfer-Element mit dem Index  $k$  zwischen den Massen  $i$  und  $j$  um Lose ergänzt, beschreibt Gleichung (2.7) die Kraft, welche das Feder-Dämpfer-Element auf die angrenzenden Massen ausübt:

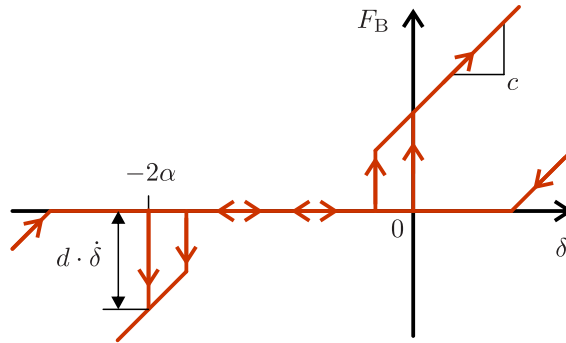
$$F_{\text{B},k} = c_k \tau_k + d_k \dot{\tau}_k \quad (2.7)$$

$$\text{mit} \quad \tau_k = \delta_k - \lambda_k, \quad \delta_k = q_i - q_j. \quad (2.8)$$

Aus der Tatsache, dass im Losespalt  $F_{\text{B},k} = 0$  gilt und dass  $\lambda_k$  auf den Bereich  $[-2\alpha, 0]$  begrenzt ist, ergibt sich die Differentialgleichung ( $k$  weggelassen)

$$\dot{\lambda} = f_\lambda(\cdot) = \begin{cases} \max\left(0, \dot{\delta} + \frac{c}{d}(\delta - \lambda)\right) & \text{für } \lambda = -2\alpha \\ \dot{\delta} + \frac{c}{d}(\delta - \lambda) & \text{für } -2\alpha < \lambda < 0 \\ \min\left(0, \dot{\delta} + \frac{c}{d}(\delta - \lambda)\right) & \text{für } \lambda = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

also ein Integrator mit Sättigung [NGG97; Zem12]. Der einzige Schätzparameter ist  $\{\alpha\}$ . Abbildung 2.9 zeigt die Hystereseschleife des Elements. Es ist zu sehen, dass die Anschläge an den Rändern des Losebereichs bei gedämpften Systemen geringfügig von  $-2\alpha$  oder 0 abweichen.



**Abbildung 2.9:** Hystereseschleife des Feder-Dämpfer-Elements mit Spiel.

Für die Integration des physikalischen Losemodells wird der Fall betrachtet, dass dem Feder-Dämpfer-Element  $k$ , das die Massen  $i$  und  $j$  verbindet, Lose hinzugefügt wird. Die Integration erfolgt in vier Schritten:

1. Hinzufügen des Zustands  $\lambda_k$  ohne Verbindungen zu Eingängen, Zuständen und Ausgängen
2. Es soll die Federkraft in (2.7) um den Einfluss des Losezustands ergänzt werden, siehe (2.8). Ab diesem Schritt werden nur die Zustände und Ausgänge

$$\mathbf{x}_{\text{red}} = (q_i, q_j, \lambda_k, \dot{q}_i, \dot{q}_j)^T, \quad \mathbf{y}_{\text{red}} = (\ddot{q}_i, \ddot{q}_j)^T \quad (2.10)$$

betrachtet. Dadurch erscheinen  $i$  und  $j$  nicht mehr in den Ausdrücken. Auf  $\mathbf{A}_{\text{red}}$  wird die Matrix  $\mathbf{A}_{\text{add}}$  gleicher Größe hinzuaddiert. Sie enthält ausschließlich Nullen, außer  $A_{\text{add } 4,3} = A_{\text{red } 4,2}$  und  $A_{\text{add } 5,3} = -A_{\text{red } 5,1}$ . Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass der Zustand  $\lambda_k$  in gleicher Weise in die Gleichung (2.7) eingeht wie  $q_j$  und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von  $q_i$ . Durch Auslesen der Einträge der Systemmatrix hat das resultierende Feder-Dämpfer-Element mit Lose die gleichen Parameter wie das ursprüngliche Feder-Dämpfer-Element.

3. Addieren der nichtlinearen Systemfunktion

$$\mathbf{f}_{\text{add}} = (0, 0, f_\lambda, A_{\text{red } 4,5} f_\lambda, -A_{\text{red } 5,4} f_\lambda)^T \quad (2.11)$$

auf  $\mathbf{f}_{\text{red}}$ . Das dritte Element  $f_\lambda$  ist die nichtlineare Gleichung (2.9), also die Systemfunktion zum Losezustand. Die letzten beiden Einträge beinhalten die Dämpfungsrückkopplung. Da  $\dot{\lambda}_k$  nicht als Zustand verfügbar ist, wird stattdessen die Systemfunktion  $f_\lambda$  verwendet.

4. Aktualisieren der Ausgangsmatrix und der Ausgangsfunktion:  $\mathbf{C}_{\text{red}} = \mathbf{A}_{\text{red } 4-5}$ ,  $\mathbf{g}_{\text{red}} = \mathbf{f}_{\text{red } 4-5}$ .

Der Vorgang kann für weitere Feder-Dämpfer-Elemente wiederholt werden. Alternativ zu diesem Vorgehen könnte auch direkt ein Feder-Dämpfer-Element mit Lose hinzugefügt werden.

**Eingangs- und Ausgangsauswahlmatrix:** Als nächstes werden die Sensor- und Aktorpositionen definiert. Die Aktoren werden durch eingangsseitige Multiplikation mit einer Eingangsauswahlmatrix aus  $N$  Zeilen definiert. Die Sensoren werden durch eine Ausgangsmultiplikation mit einer Ausgangsauswahlmatrix definiert. Die  $3N$  Spalten dieser Matrix korrespondieren zu Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungssensoren auf den Massen.

**Totzeit:** Zuletzt werden noch externe Totzeiten berücksichtigt, weil reale Systeme durch Signalübertragung und Abtastung häufig totzeitbehaftet sind. Im Single-Input-Single-Output (SISO)-Fall genügt ein Parameter  $\{T_t\}$ , der entweder der Eingangs- oder der Ausgangstotzeit hinzuaddiert wird. Die Umsetzung der Totzeit erfolgt bei Frequenzbereichsverfahren durch Multiplikation der ÜTF mit einer Exponentialfunktion, bei Zeitbereichsverfahren durch Verzögerung der Signale inklusive Zwischenzeitschritt-Interpolation.

Durch die Verknüpfung der beschriebenen Teilmodelle ergibt sich zunächst eine große kombinatorische Vielfalt, die vor Durchführung der Struktur- und Parameteridentifikation noch weiter eingeschränkt werden muss. Der nächste Abschnitt soll einen Überblick über die Anzahl möglicher Kombinationen geben, die sich für Mehrmassenschwingermodelle ergibt.

### 2.3 Kombinatorik der Mehrmassenschwingermodelle

Nach der Beschreibung des verwendeten „Baukastensystems“ werden nun kombinatorische Überlegungen angestellt, um einen Überblick zu geben, welche und wie viele Modelle sich beispielsweise durch Variation von Aktor- und Sensorposition ergeben. Die resultierenden Kombinationen sollen bei der Unterscheidbarkeitsanalyse in Kapitel 4 verwendet werden und die Überlegungen ermöglichen die Festlegung einer Menge potentieller Modelle bei der Strukturidentifikation.

In diesem Abschnitt liegt der Fokus auf Mehrmassenschwingern, weil dabei die Variantenvielfalt nicht auf den ersten Blick zu übersehen ist, während beispielsweise zusätzliche binäre Entscheidungen durch Berücksichtigung oder Vernachlässigung von Totzeit zu leicht bestimmbareren Veränderungen der Ergebnisse führen würden. Außerdem ist zu erwarten, dass Totzeit und Nichtlinearitäten in jedem Fall zu einem charakteristischen Ein-Ausgangsverhalten führen und somit das Problem der Unterscheidbarkeit nicht wesentlich erschweren.

Es werden ausschließlich Feder-Masse-Dämpfer-Ketten ohne Verzweigungen oder Schleifen und mit nur einem Aktor und einem Sensor, wie in Abbildung 2.10 beispielhaft gezeigt, betrachtet. Modelle mit einem Aktor decken bereits einen großen Teil der industriellen Anwendungen ab komplexere Strukturen wären eher für rein theoretische Überlegungen relevant. Außerdem sind



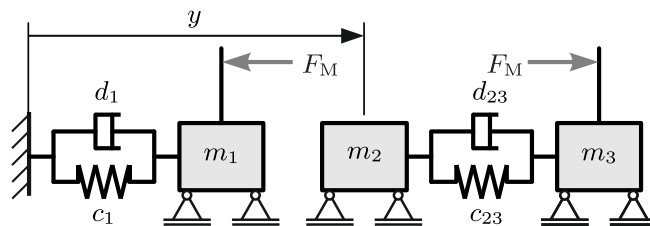
Verzweigungen erst ab vier Massen möglich. Die Berücksichtigung weiterer Sensoren wird später thematisiert.

Es wird wieder von rein rotatorischen oder rein translatorischen Systemen ausgegangen und die Darstellung ist auf translatorische Systeme beschränkt. Eine Kombination aus beiden würde hauptsächlich einfach beschreibbare Strukturen mit bekannten Parametern beinhalten wie Umlenkradien und Hebelarme.

An einer Stelle in der Kette gekoppelter Massen muss es eine „Lücke“ geben, wo das Feder-Dämpfer-Element fehlt, sodass sich der Abtrieb bewegen kann. Sie befindet sich zwischen den Massen  $n_L \in \mathbb{N}$  und  $n_L + 1$ . Der Aktor und der Sensor haben einen Angriffspunkt/Messpunkt  $n_{akt+} \in \mathbb{N}$  bzw.  $n_{mess+} \in \mathbb{N}$  und einen Referenzpunkt  $n_{akt-} \in \mathbb{N}$  bzw.  $n_{mess-} \in \mathbb{N}$ . Über den Referenzpunkt wird beim Aktor die Gegenkraft eingeleitet und beim Sensor entspricht er der Messposition  $y = 0$ . Ein Index von 0 bezieht sich auf die stationäre Umgebung anstelle einer Masse. Die Menge der möglichen Modelle kann durch Variation dieser fünf Indizes unter Beachtung der folgenden Regeln konstruiert werden:

$$\begin{cases} 0 \leq n_L \leq N - 1, \\ 0 \leq n_{akt-} \leq n_L, \\ n_L + 1 \leq n_{akt+} \leq N, \\ 0 \leq n_{mess-} \leq n_L, \\ n_L + 1 \leq n_{mess+} \leq N. \end{cases} \quad (2.12)$$

Die Regeln stellen sicher, dass nur physikalisch sinnvolle Systeme entstehen, z. B. müssen Aktor und Sensor immer die Lücke überspannen. Für  $N = 1, \dots, 5$  Massen ist die Anzahl der möglichen Modelle oben in Tabelle 2.1 angegeben.



**Abbildung 2.10:** Beispielhaftes Mehrmassenmodell mit  $N = 3$ ,  $n_L = 1$ ,  $n_{akt+} = 3$ ,  $n_{akt-} = 1$ ,  $n_{mess+} = 2$ ,  $n_{mess-} = 0$

**Tabelle 2.1:** Anzahl der möglichen Modelle für unterschiedliche Anzahlen von Massen für verschiedene Zählweisen.

Massen $N$	1	2	3	4	5
Grundlegende Kombinationen	1	8	34	104	259
Ohne Ordnungsreduktionen	1	5	17	50	129
+ Redundanzfrei	1	3	11	30	75

Diese Aufzählung umfasst noch Modelle, bei denen einige Massen für beliebige Parametrierungen nicht wirksam sind und sich folglich Systeme reduzierter Ordnung ergeben. Um diese nicht mit zu zählen, müssen zusätzlich die folgenden Regeln berücksichtigt werden:

$$\begin{cases} n_L = 0 \vee n_{\text{akt}-} > 0, \\ n_L = 0 \vee n_{\text{mess}-} > 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Die erste Bedingung stellt sicher, dass die Anregung durch den Aktor einen Einfluss auf alle Massen hat. Die zweite Bedingung sorgt dafür, dass alle Bewegungen einen Einfluss auf den Sensor haben, außer möglicherweise spezielle, z. B. symmetrische Parametrierungen. Im Beispiel in Abbildung 2.10 ist die zweite Bedingung verletzt: Masse 1 wird zwar angeregt, hat aber keinen Einfluss auf die Messung. Als Ergebnis der Einbeziehung der Regeln (2.13) reduziert sich die Anzahl der möglichen Modelle, siehe Tabelle 2.1.

Schließlich müssen redundante Kombinationen von der Zählung ausgeschlossen werden. Redundant bedeutet, dass zwei Modelle ineinander umgewandelt werden können, indem Elemente umbenannt/umnummeriert werden. Wenn der einzige Unterschied zwischen zwei Modellen in der Benennung der Elemente besteht, sollten sie nicht separat gezählt werden [ZCK91]. Dies kann beispielsweise durch die folgenden zusätzlichen Regeln verhindert werden:

$$\begin{cases} n_{\text{akt}+} \leq n_{\text{mess}+}, \\ n_{\text{akt}+} < n_{\text{mess}+} \quad \text{für} \quad n_{\text{mess}+} > n_L + \lceil (N - n_L)/2 \rceil, \end{cases} \quad (2.14)$$

was zur letzten Zeile von Tabelle 2.1 führt. Mit dem Symbol  $\lceil \cdot \rceil$  ist das Aufrunden auf natürliche Zahlen gemeint. Beide Regeln werden durch das Beispiel in Abbildung 2.10 verletzt. Für Zweimassensysteme ergeben sich drei Modelle, siehe Tabelle 2.2 und für Dreimassensysteme ist die vollständige Liste der elf möglichen Modelle in Tabelle 2.3 dargestellt.

In den Tabellen sind *kollokierte Systeme* hervorgehoben, d. h. Systeme mit identischem Aktor- und Sensorort, weil diese häufig andere Eigenschaften haben als die nicht-kollokierten Systeme [Ott08; Obr09].

**Tabelle 2.2:** Kompletter Satz von zu berücksichtigenden ZMS-Modellen. Kollokierte Systeme sind mit \* gekennzeichnet.

Bezeichner	Skizze
2A1*	
2A2	
2B1*	

Insgesamt zeigt sich, dass durch die kombinatorische Vielfalt mit zunehmender Massenzahl eine große Anzahl potentieller Modelle entsteht, was die Verwendung von Vorwissen und die sorgfältige Festlegung zu betrachtender Varianten nahelegt. Auf der anderen Seite bleibt eine systematische Analyse aller Modelle bis drei Massen überschaubar (max. elf Modelle bzw. fünf kollokierte Modelle). Deshalb werden diese Modelle im Weiteren mehrfach wieder aufgegriffen. Bei vier oder mehr Massen steigen nicht nur die Kombinationsmöglichkeiten schnell an, sondern es stellt sich auch die Frage nach der praktischen Relevanz. Schließlich sind Mehrmassenschwinger hauptsächlich als Vereinfachung der komplexen Realität interessant.

**Tabelle 2.3:** Kompletter Satz von zu berücksichtigenden DMS-Modellen. Kollokierte Systeme sind mit einem Sternchen \* gekennzeichnet.

Bez.	Skizze
3A1*	
3A2	
3A3	
3A4*	
3A5	
3B1*	
3B2	
3C1*	
3C2	
3C3*	
3C4	

### 3 Strukturidentifikation unter Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit

Die Grundidee in diesem Kapitel ist, die Identifizierbarkeit der Modellparameter als Ausschlusskriterium für Modelle mit zu berücksichtigen. Die Motivation dafür ist, wie in der Einleitung geschrieben, dass eine Bestimmung physikalisch motivierter Modelle nur dann nützlich ist, wenn die ausgegebenen Modellparameter zumindest näherungsweise mit der Realität übereinstimmen.

Nach einer kurzen Einführung in Grundlagen und bisherige Arbeiten zur praktischen Identifizierbarkeit in Abschnitt 3.1 werden ein Ansatz im Frequenzbereich (Abschnitt 3.2) und einer im Zeitbereich (Abschnitt 3.3) untersucht. Da in beiden Fällen die Identifizierbarkeit eine wichtige Limitierung darstellt, zeigt Abschnitt 3.4 die Verbesserung dieser durch Zusatzsensorik. Das Kapitel schließt mit einem Fazit zur Machbarkeit und zum Nutzen der Methodik.

#### 3.1 Grundlagen und bisherige Arbeiten zur Identifizierbarkeit

Generell wird bei der Untersuchung der Identifizierbarkeit zwischen *struktureller* und *praktischer* Identifizierbarkeit unterschieden: Die strukturelle Aussage geht gemäß der meisten Veröffentlichungen von einer geeigneten Anregung und idealen Messbedingungen aus, berücksichtigt also kein Messrauschen. Sie beantwortet die Frage, ob für (fast) alle Parameterkombinationen eine Identifikation der Parameter möglich ist. Nur für spezielle Parametrierungen, die kein Volumen im Parameterraum einnehmen, darf dies anders sein. Praktische Identifizierbarkeit berücksichtigt dagegen die Anregung, die tatsächlichen Parameterwerte und teilweise auch das Sensorrauschen [Vu15]. Meistens wird unter praktischer Identifizierbarkeit auch eine ja/nein-Aussage verstanden, d. h. es muss schwellwertbasiert entschieden werden, ob alle Parameter gut genug identifizierbar sind oder nicht. Weitere Informationen sind hier zu finden: [FG67; Mar70; Ste87; Bel91; BA98; BRK01; KPT05; MXPW11; NWLK15; GVB17; LDM22].

Gute Übersichten zur Untersuchung strukturellen Identifizierbarkeit von linearen und nichtlinearen dynamischen Systemen werden in [CD80; Vu15; MPD+18; ADM20] gegeben. Beispiele für Software Werkzeuge sind GenSSI 2.0 [LFC+18], DAISY [BSAD07], COMBOS [MKD14], SIAN [HOPY19], strucId v 2.0 [SJ21], Strike-GOLDD [MBV21], IdentifiabilityAnalysis [KAJ12].

Meistens werden für die strukturellen Untersuchungen symbolische Berechnungen durchgeführt, die nur bei kleinen Modellen zu einer Lösung führen und es müssen fast immer mehrere Methoden getestet werden, um für das gegebene Problem eine geeignete zu finden [WHR+21]. Bei manchen

Kriterien ist nicht vorab bekannt, wie viele Ableitungen o. ä. zu berechnen sind und somit ist nur eine hinreichende Aussage für Identifizierbarkeit möglich. Zudem werden spezielle Modellstrukturen vorausgesetzt (eingangsauffin, rational, ...) [ADM20]. Dies alles erschwert die Verwendung in einem Algorithmus zur automatischen Suche über viele Modelle.

Häufig wird aufgrund dieser Schwierigkeiten auf eine vollständige Untersuchung der strukturellen Identifizierbarkeit verzichtet und stattdessen direkt die praktische Identifizierbarkeit mit gegebenen numerischen Werten überprüft [MM12]. Dieses Vorgehen ist auch durch die größere Relevanz der praktischen Identifizierbarkeit gerechtfertigt. Von gegebener praktischer Identifizierbarkeit kann zumindest auf eine lokale strukturelle Aussage gefolgert werden [Jan16], bei fehlender praktischer Identifizierbarkeit ist keine strukturelle Aussage möglich.

Im Folgenden wird zunächst auf bisherige Arbeiten zur Modellauswahl unter Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit (Abschnitt 3.1.1) und danach auf die hier verwendeten mathematischen Kriterien (Abschnitt 3.1.2) eingegangen. Weil diese auf einer Linearisierung beruhen, beschreibt Abschnitt 3.1.3 eine Methode zur Überprüfung der dadurch verursachten Fehler, die später in der Arbeit angewendet wird.

### 3.1.1 Bisherige Arbeiten zur Modellauswahl auf Basis der Identifizierbarkeit

Es finden sich in der Literatur viele Argumente, weshalb ein Modell nicht nur genau, sondern auch identifizierbar sein sollte, sodass die Identifizierbarkeit als Bewertungskriterium beliebt ist: Wenn die Identifizierbarkeit sichergestellt ist,

- sind die Prädiktionen belastbar [WHR+21], auch wenn die Anregung eine deutlich andere ist als bei der Identifikation [DEB+13],
- sind Extrapolationen möglich,
- kann das Modell nützliche Einblicke in das reale System liefern [MPD+18],
- haben die Werte von physikalisch interpretierbaren Parametern eine Bedeutung und führen nicht zu Fehlinterpretationen und falschen Schlussfolgerungen [MPD+18; TS18],
- können nicht messbare Zustände beobachtet werden [MPD+18],
- findet der Optimierer zur Identifikation robuster das globale Optimum [BÄ70].

Die Gründe hängen also teilweise mit dem Systemverständnis zusammen, teilweise mit der Genauigkeit des Ein-/Ausgangsverhaltens. Zusätzlich ist bekannt, dass Mehrdeutigkeiten durch Identifizierbarkeitsprobleme bei Beobachter-basierten Reglern einen Einfluss auf den geschlossenen Regelkreis haben können, auch wenn sie sich nicht auf das Ein-/Ausgangsverhalten des unregulierten Systems auswirken [Ben07].

Zur Lösung des Problems wird allerdings nicht immer eine Modellauswahl durchgeführt. Andere Ansätze sind die Festlegung einzelner Parameter auf Literaturwerte [HVB+21], die Optimierung

der Anregung, die Bestimmung geeigneter/optimaler Ausgangsgrößen/Messzeitpunkte/Frequenzen [Pap04; MPD+18], das Durchführen weiterer Versuche, Regularisierung [DEB+13] und die Berechnung von Modellvereinfachungen [SM15; MBV21].

Eine Modellauswahl unter Berücksichtigung der Identifizierbarkeit ist in der Quelle [HVB+21] beschrieben, in der physikalisch motivierte Modelle u. a. in Bezug auf strukturelle und praktische Identifizierbarkeit verglichen werden. In [MBV21] werden nicht strukturell identifizierbare Modelle schrittweise neu parametrisiert, wobei der Benutzer durchzuführende Transformationen wählen kann, damit die physikalische Interpretierbarkeit der Parameter erhalten bleibt. Teilweise werden so Parameter identifizierbar, ohne dass sie selbst transformiert werden. Bei parameterlinearen Modellen gibt es deutlich mehr Ansätze zur Strukturoptimierung unter Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit, weil leicht beliebige Parameter aus dem Modell entfernt werden können z. B. [VKT+].

Bisher betrachtete Anwendungen der Identifizierbarkeitmethoden sind hauptsächlich biologischer oder chemischer Art [GVB17; JSM18]. Andere Anwendungen sind Grundwassermodelle [KM98], Ernährung [KPT05] und Finanzmodelle [AS17]. Es gibt nur relativ wenige Untersuchungen zu mechanischen Systemen [ABH83; Wan91; FBL06; JQT11; VKT+]. In [NW88; Wic82] werden zwar die Sensitivitäten der Parameter von mechanischen Systemen berechnet, aber sie werden nicht zur Analyse der Identifizierbarkeit verwendet.

Außerdem wurde bisher selten die praktische Identifizierbarkeit bei der Frequenzbereichsidentifikation untersucht, also die Erweiterung auf komplexe Zahlen [PPS+15; BKDH18]. In [NW88] wird eine Sensitivitätsanalyse im Frequenzbereich durchgeführt, aber nur als Hilfe für Designänderungen, nicht zur Bewertung der praktischen Identifizierbarkeit.

### 3.1.2 Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit

Die in dieser Arbeit verwendeten Kriterien zur Bewertung der lokalen praktischen Identifizierbarkeit werden kurz eingeführt. Sie basieren auf der sog. Sensitivitätsmatrix, wie im Folgenden beschrieben. Ausgangspunkt ist die allgemeine nichtlineare Modellgleichung in Abhängigkeit von den Parametern  $\theta \in \mathbb{R}^{N_\theta}$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\theta) \in \mathbb{R}^{N_m} \quad (3.1)$$

in Kombination mit der Kostenfunktion  $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ :

$$\mathcal{J} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)^T \mathbf{W} (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0) = \|\Lambda(\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)\|_2^2. \quad (3.2)$$

Der Messvektor  $\mathbf{y}_0$  enthält alle Messungen, also z. B. alle Systemausgänge über alle Messzeitpunkte. Die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_m \times N_m}$  ist symmetrisch positiv definit<sup>1</sup> und kann beispielsweise

<sup>1</sup>Die Gewichtungsmatrix muss symmetrisch positiv definit sein damit  $\mathcal{J}$  nie negativ wird und nur dann null, wenn der Fehlervektor null ist.

dazu dienen, unterschiedliche physikalische Einheiten der Ausgangsgrößen zu kompensieren. Häufig ist es eine diagonale Matrix oder sogar die Einheitsmatrix. Die Zerlegung  $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{W}$  existiert, weil  $\mathbf{W}$  symmetrisch positiv definit ist [PS12]).

Bei der lokalen praktischen Identifizierbarkeit wird nicht der vollständige Verlauf der Kostenfunktion berücksichtigt, sondern nur die *Sensitivitätsmatrix*  $\mathbf{S}_{nl}$  inklusive Gewichtung lokal in einem Punkt  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  ausgewertet:

$$\Lambda \mathbf{S}_{nl} = \Lambda \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} . \quad (3.3)$$

Die Größen der Einträge der Spaltenvektoren charakterisieren den Einfluss der zugehörigen Parameter auf die Ausgangsgrößen. Dieser Einfluss wird als *Sensitivität* bezeichnet und bestimmt maßgeblich die Identifizierbarkeit. Zur quantitativen Bewertung der Sensitivität dienen die sog. *Parameter Importance Indices (PII)* [BRK01]:

$$\delta_j^{\text{msqr}} = \|(\Lambda \mathbf{S}_{nl})_j \Delta \theta_j\|_2 / \sqrt{N_m}, \quad (3.4)$$

wobei  $(\ )_j$  die Spalte indiziert, die dem Parameter  $j$  zugeordnet ist. Die Normierung  $\Delta \theta_j$  dient zur Berücksichtigung unterschiedlicher physikalischer Einheiten der Parameter und sollte in der Größenordnung des Parameters  $j$  liegen. Hier wird der zuvor identifizierte Wert genommen, obwohl dies auch trügerisch sein kann, wenn ein Parameter zufällig einen Wert nahe null erhält. Zur Festlegung eines Schwellwertes für den minimal zu erreichenden Wert wird gefordert, dass das Verhältnis von größtem zu kleinstem PII nicht größer ist als ein bestimmter Wert, z. B. 1.000. Dieser Schwellwert ist willkürlich festzulegen und orientiert sich an der Anschauung, dass die Modell- und Messfehler den Einfluss eines entsprechend unbedeutenden Parameters nicht sichtbar erkennen lassen dürften [BRK01]. In [GVB17] wird 10.000 verwendet.

Außerdem haben die Singulärwerte von  $\Lambda \mathbf{S}_{nl}$  bzw. die Eigenwerte  $\lambda_k$  von  $\mathbf{S}_{nl}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{nl}$  einen großen Einfluss auf die Identifizierbarkeit. So ist beispielsweise bei Minimierung von (3.2) die Summe der Varianzen der identifizierten Parameter näherungsweise durch

$$\text{tr} [\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\theta}})] = \text{tr} ([\mathbf{S}_{nl}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{nl}]^{-1}) = \sum_{k=1}^{N_\theta} \frac{1}{\lambda_k}. \quad (3.5)$$

gegeben, wenn  $\mathbf{W}$  der inversen Kovarianzmatrix der Messpunkte entspricht und diese normalverteilt sind [HMC+08]. Dies zeigt, dass Eigenwerte nahe null zu großen Varianzen einiger oder aller identifizierter Parameter führen, auch wenn deren Sensitivität hoch ist. Anschaulich bedeutet dies, dass der Einfluss eines Parameters durch das Zusammenspiel anderer Parameter (fast vollständig) kompensiert werden kann. Der Effekt heißt *Kollinearität*, oder *multi-Kollinearität*, wenn mehr als zwei Parameter beteiligt sind.



Zur Quantifizierung der Kollinearität unabhängig von der Sensitivität wird hier der in [BRK01] definierte *Kollinearitätsindex*  $\gamma$

$$\gamma = \frac{1}{\underline{\sigma}} \quad (3.6)$$

verwendet. Dabei ist  $\underline{\sigma}$  der kleinste Singulärwert von  $\tilde{\mathbf{S}}$ , der Matrix  $\mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{\text{nl}}$  mit auf Einheitslänge normierten Spalten. Die Bedeutung der Kennzahl ist, dass die Änderung eines Parameters in der Form  $\|\mathbf{\Lambda} \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})\|_2$  in linearer Näherung durch das Zusammenspiel der anderen Parameter bis auf  $100/\gamma\%$  kompensiert werden kann. Kollinearität ist kritisch, wenn  $\gamma$  größer ist als ein bestimmter Wert; in [BRK01] wird 20 vorgeschlagen, weil dann eine Abweichung von 5% bleibt.

Alternativ kann die (multi-)Kollinearität anhand der sog. *skalierten Konditionsindizes* durch

$$\tilde{\eta}_k = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_k} \quad (3.7)$$

gemessen werden [Bel91]. Die Ausdrücke  $\sigma_k$  und  $\bar{\sigma}$  stehen für den  $k$ -ten bzw. den maximalen Singulärwert von  $\tilde{\mathbf{S}}$ . Nach [Bel91] sind Werte über 10...30 für den größten Index kritisch. Welche Parameter jeweils beteiligt sind, kann mithilfe der sog. *variance-decomposition proportions* bestimmt werden, siehe [Bel91].

Für weitere Kriterien sei auf die Übersichtsartikel [DEB+13; LDM22] verwiesen. Aufgrund der umfangreichen Literatur zu diesem Thema soll hier nicht näher darauf eingegangen werden.

### 3.1.3 Bewertung der Nichtlinearität

Da die vorgestellten Kriterien auf einer Linearisierung in der Form  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}) \approx \mathbf{S}_{\text{nl}}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  und somit einer Approximation basieren, soll der dabei gemachte Fehler an repräsentativen Modellen überprüft werden. Dazu dienen hier die sog. *Profile Likelihood (PL) Plots* und die *conditional likelihood Plots* im Vergleich mit ihren jeweiligen linearen Näherungen, wie in diesem Abschnitt beschrieben [VM88].

Die Profile Likelihood Methode betrachtet die Parameter der Reihe nach. Der aktuelle Parameter wird auf einen bestimmten Wert festgesetzt, während die anderen Parameter identifiziert werden. Die Identifikation wird für weitere Werte aus dem zulässigen Bereich des aktuellen Parameters wiederholt. Es ergibt sich eine Kurve für  $\mathcal{J}$ , die ausgehend von einem Minimum zu beiden Seiten hin stark zunimmt, wenn der betrachtete Parameter gut identifizierbar ist [RKM+09].

Bei Verwendung der Kostenfunktion (3.2) ähneln die Kurven im PL Plot häufig einer Parabel, deren zweite Ableitung im Optimum charakteristisch ist für die Identifizierbarkeit. Wenn das Identifikationsproblem die lineare Form  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{S}_{\text{nl}}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{h}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$  aufweist, ergibt sich eine exakte Parabel, denn die ersten beiden Ableitungen der Kostenfunktion lauten dann:

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}} = (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)^{\text{T}} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^{\text{T}}) \frac{d\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} = 2 (\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0)^{\text{T}} \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = 2\mathbf{S}_{\text{nl}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}}. \quad (3.9)$$

Höhere Ableitungen verschwinden, weil die zweite Ableitung unabhängig von  $\boldsymbol{\theta}$  ist [VDV+09]. Somit ist eine Taylorreihe um das Minimum  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  mit der Ordnung zwei

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathcal{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \left. \frac{\partial^2 \mathcal{J}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} \right|_{\boldsymbol{\theta}=\hat{\boldsymbol{\theta}}} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= \mathcal{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{S}_{\text{nl}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}} (\boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

in diesem Fall eine exakte Darstellung. Der lineare Term taucht nicht auf, weil er im Optimum null ist.

Ausgehend von dieser Gleichung kann nach [PTVF07] die Parabel angegeben werden, welche den PL Plot für einen Parameter beschreibt. Wird z. B. der Parameter 1 betrachtet, so ergibt sich

$$\mathcal{J}_{\text{pl}}(\theta_1) = \mathcal{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2 / C_{11} \quad (3.11)$$

bzw. die zweite Ableitung  $2/C_{11}$ , mit  $\mathbf{C} = (\mathbf{S}_{\text{nl}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}})^{-1}$ . Dabei ist  $C_{11}$  das Element in der ersten Zeile und ersten Spalte der Matrix  $\mathbf{C}$ .

Ein kleiner Wert der zweiten Ableitung bedeutet schlechte Identifizierbarkeit, aber es ist anhand der PL Methode nicht zu erkennen, ob das Problem mit der Sensitivität oder mit der Kollinearität zusammenhängt. Als Zusatztest kann der Verlauf der Kostenfunktion dargestellt werden, wenn nur der aktuelle Parameter variiert wird, aber nicht die verbleibenden Parameter optimiert werden. Dies zeigt die Sensitivität des Parameters und wird auch *conditional likelihood function* [BRK01] genannt. Im Beispiel des Parameters 1 ergibt sich dann ausgehend von (3.10) für ein parameterlineares Modell die Parabel

$$\mathcal{J}_{\text{1D}}(\theta_1) = \mathcal{J}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + (\mathbf{S}_{\text{nl}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}})_{11} (\theta_1 - \hat{\theta}_1)^2. \quad (3.12)$$

Die anderen Elemente von  $\mathbf{S}_{\text{nl}}^T \mathbf{W} \mathbf{S}_{\text{nl}}$  spielen keine Rolle, weil die Ausdrücke  $\theta_2 - \hat{\theta}_2$ ,  $\theta_3 - \hat{\theta}_3$ , ... allesamt null sind. Die resultierende zweite Ableitung ist also  $2(\mathbf{C}^{-1})_{11}$  [TPP+].

Zusammenfassend ist für beide Funktionen, die die Identifizierbarkeit nichtlinearer Modelle für jeden Parameter visualisieren, die lineare Entsprechung leicht auf Basis der Sensitivitätsmatrix im Optimum und der Gewichtungsmatrix zu berechnen.

Um den Einfluss der Nichtlinearitäten in den Modellgleichungen zu visualisieren, zeigt Abschnitt 3.3.2 exemplarisch die exakten Profile Likelihood Verläufe im Vergleich zu den Parabelnäherungen, die einem parameterlinearen Modell entsprechen würden. Je weniger beides voneinander abweicht, besonders im Optimum, desto besser ist die Verwendung der Kriterien aus 3.1.2 zu rechtfertigen. Dieser Vergleich wurde in [TPP+] publiziert und danach auch in [WHR+21] durchgeführt. Ein alternativer Ansatz zur Überprüfung der linearen Näherung über Konfidenz-Ellipsen

ist in [KM98] zu finden. Weitere Verfahren zur Bewertung der Abweichung von Linearität in den Parametern sind in [BW88] beschrieben.

## 3.2 Verfahren im Frequenzbereich

In diesem Abschnitt wird die Struktur- und Parameteridentifikation unter Berücksichtigung der Identifizierbarkeit basierend auf der Veröffentlichung [TPWO20] im Frequenzbereich durchgeführt. Durch die Beschränkung auf Frequenzbereichsmethoden können nur solche Effekte berücksichtigt werden, die in Form einer linearen ÜTF von den Aktoren hin zu den Sensoren darstellbar sind. Dafür vereinfacht sich die Identifikation, weil keine aufwendigen Zeitschrittssimulationen erforderlich sind und auch bei der Anregung gibt es weniger Freiheitsgrade. Außerdem sind die Ergebnisse gut visuell darstellbar und überprüfbar.

### 3.2.1 Algorithmischer Ablauf

Der hier verfolgte Ablauf lässt sich grob in fünf Schritte einteilen:

1. Generierung von Trainingsdaten in einem ersten Experiment,
2. Parameteridentifikation für eine Liste potentieller Modelle (Modellkandidaten, Modellhypothesen),
3. Ausschluss der Kandidaten mit unzureichender praktischer Identifizierbarkeit,
4. Bestimmung des genauesten Modells anhand von Validierungsmessungen,
5. Berechnung des Modellfehlers an separaten Testmessungen.

Es wird eine vollständige Suche über alle Kombinationen von Modellen durchgeführt. In der Veröffentlichung [TPWO20] wurde als Alternative eine Form der genetischen Programmierung untersucht. Durch die gleichzeitige Vererbung vorteilhafter Teilmodelle und geeigneter Parameterwerte kann besonders bei sehr vielen Varianten schneller eine gute Lösung gefunden werden als wenn für jedes Modell unabhängig eine Parameteridentifikation durchgeführt werden muss.

Es hat sich dabei jedoch gezeigt, dass durch die vielen zufallsgesteuerten Entscheidungen des genetischen Algorithmus der genaue Hergang schwer nachzuvollziehen und zu reproduzieren ist. Bei wenigen potentiellen Modellen scheint ein systematischer Ansatz, der garantiert alle Modelle testet, sinnvoller. Generell besteht die Gefahr, dass die Komplexität unpraktikabel hoch wird, z. B. in Bezug auf die Programmierung, aber auch die Vorgabe von Parametergrenzen und Hyperparametern. In dieser Arbeit wird daher stets von endlich vielen potentiellen Modellen ausgegangen und eine vollständige Suche durchgeführt.

Die Anregung im *ersten Schritt* ist für alle Modelle gleich und besteht nur aus einem Experiment. Eine optimale Anregung für jedes Modell wäre wie in der Einleitung schon geschrieben nicht

praktikabel. Im *zweiten Schritt* werden die Parameter identifiziert, indem der berechnete und der gemessene Frequenzgang in einer Gleichungsfehlerformulierung abgeglichen werden. Für die genaue Kostenfunktion werden im nächsten Abschnitt mehrere mögliche Formulierungen untersucht.

Die Überprüfung der praktischen Identifizierbarkeit im *dritten Schritt* basiert auf festgelegten Schwellwerten und führt erwartungsgemäß zu starken Schwellwertabhängigkeiten, was in Abschnitt 3.2.4 gezeigt wird. Schließlich wird das genaueste Modell unter den Modellen mit gegebener praktischer Identifizierbarkeit an einer zweiten Messung ausgewählt, wobei die Kostenfunktion die gleiche ist wie bei der Identifikation. Danach wird ggf. die erreichte Genauigkeit noch an einer dritten Messung ausgewertet, um eine biasfreie Bewertung der Methode zu erhalten.

### 3.2.2 Wahl der Kostenfunktion im Frequenzbereich

Bei der Identifikation dynamischer Systeme im Frequenzbereich ist zu beachten, dass der Ausgangsvektor aus Gleichung (3.1) bzw. der Fehlervektor  $\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}_0$  zunächst komplexe Zahlen enthalten würde und somit die Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit nicht direkt anwendbar wären. Es gibt jedoch mehrere Möglichkeiten zur Formulierung eines reellen Fehlervektors. Im einfachsten Fall wird nur die Amplitude verwendet und die Phaseninformation verworfen [NW88; PTW+], was jedoch einen Informationsverlust bedeutet. Im Folgenden werden verschiedene mögliche Formulierungen zusammen mit der resultierenden Sensitivitätsmatrix nach (3.3) beispielhaft angegeben, welche Amplitude und Phase berücksichtigen. Ziel ist es, die Wahl der Kostenfunktion über die Identifizierbarkeit zu begründen. Die Ausführungen beschränken sich auf SISO Systeme, obwohl eine Erweiterung auf mehrere Ein- und Ausgänge durch Anordnung der Matrixelemente in einem Vektor möglich wäre.

#### Betrachtete Kostenfunktionen und zugehörige Sensitivitätsmatrizen

Fall 1: Die Kostenfunktion basiert auf der Differenz zwischen Modell  $\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{C}^{N_f \times 1}$  und Messung  $\mathbf{P}_0 \in \mathbb{C}^{N_f \times 1}$  in der komplexen Ebene für jede der  $N_f$  gemessenen Frequenzen. Manchmal wird eine symmetrisch positiv definit<sup>2</sup> gewählten Gewichtungsmatrix  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_f \times N_f}$  berücksichtigt [PS12; GCD95]:

$$\mathcal{J}_1 = \left( \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{P}_0 \right)^* \mathbf{W} \left( \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{P}_0 \right). \quad (3.13)$$

Es existiert eine reellwertige Entsprechung [PS12]

$$\mathcal{J}_1 = \Delta \mathbf{G}_{\text{re}}^T \begin{pmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix} \Delta \mathbf{G}_{\text{re}}, \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{G}_{\text{re}} = \begin{pmatrix} \text{Re}\{\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{P}_0\} \\ \text{Im}\{\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{P}_0\} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

<sup>2</sup>Symmetrisch muss sie sein, damit  $\mathcal{J}_1$  in jedem Fall reell ist und zusätzliche positive Definitheit bewirkt  $\mathcal{J}_1 \geq 0$  für alle Fehlervektoren,  $\mathcal{J}_1 = 0$  nur wenn der Fehlervektor null ist.

und eine Schreibweise wie in (3.2), rechts:

$$\mathcal{J}_1 = \left\| \begin{pmatrix} \Lambda_{r/i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_{r/i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) - \mathbf{P}_0\} \\ \operatorname{Im}\{\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{p}) - \mathbf{P}_0\} \end{pmatrix} \right\|_2^2 \quad \text{mit} \quad \Lambda_{r/i}^T \Lambda_{r/i} = \mathbf{W}. \quad (3.15)$$

Durch Ableitung des Fehlervektors  $\Delta \mathbf{G}_{\text{re}}$  kann die reelle Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}_1 \in \mathbb{R}^{2N_f \times N_\theta}$  gemäß (3.3) berechnet werden:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_r \\ \mathbf{S}_i \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{S}_r = \frac{d\operatorname{Re}\{\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})\}}{d\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{Re}\left\{ \frac{d\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} \right\}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{S}_i = \frac{d\operatorname{Im}\{\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})\}}{d\boldsymbol{\theta}} = \operatorname{Im}\left\{ \frac{d\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})}{d\boldsymbol{\theta}} \right\}. \quad (3.18)$$

Der mittlere Ausdruck von (3.17) bzw. (3.18) ist intuitiv naheliegender, aber der rechte Ausdruck ermöglicht es, den Real- und Imaginärteil der Sensitivitätsmatrix numerisch zu berechnen, nachdem die komplexe Ableitung symbolisch mit Hilfe von Computeralgebra aufgestellt wurde<sup>3</sup>. Dennoch kann für sehr komplexe Modelle auch  $d\hat{\mathbf{P}}/d\boldsymbol{\theta}$  nicht immer symbolisch berechnet werden.

Bei dieser Formulierung kann im Fall von SISO Systemen die Gewichtungsmatrix auch weggelassen werden, weil nicht Größen in verschiedenen physikalische Einheiten miteinander verglichen werden.

Fall 2: In [Sch03] wird die folgende Kostenfunktion für Mehrmassensysteme wegen ihrer angeblich überlegenen Robustheit verwendet:

$$\mathcal{J}_2 = \left\| \Lambda_{A/P} \begin{bmatrix} |\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})| - |\mathbf{P}_0| \\ \angle\{\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})\} - \angle\{\mathbf{P}_0\} \end{bmatrix} \right\|_2^2. \quad (3.19)$$

Es findet also eine Trennung in Amplitude und Phase<sup>4</sup> statt, wobei die Gewichtung  $\Lambda_{A/P}$  zur Homogenisierung der unterschiedlichen Einheiten schwer zu wählen ist.

Die Sensitivitätsmatrix nach Fall 2 ist gegeben durch (Ableiten des Fehlervektors in (3.19) nach  $\boldsymbol{\theta}$ ):

$$\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A2} \\ \mathbf{S}_{P2} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad (3.20)$$

<sup>3</sup>Es lässt sich leicht zeigen, dass dieser Austausch der Zerlegung in Real- und Imaginärteil und des Ableitungsoperators in (3.17, 3.18) möglich ist, da die komplexe Einheit als Vorfaktor in der Ableitung behandelt werden kann, siehe auch [NW88].

<sup>4</sup>Die Phase muss um Vielfache von  $2\pi$  verschoben werden, sodass sie beim Überschreiten von  $\pm\pi$  keine Unstetigkeiten aufweist.

$$S_{A2,kj} = \frac{1}{|\hat{P}_k|} \left[ \text{Im} \left\{ \hat{P}_k \right\} S_{i,kj} + \text{Re} \left\{ \hat{P}_k \right\} S_{r,kj} \right],$$

$$S_{P2,kj} = \frac{1}{|\hat{P}_k|^2} \left[ \text{Re} \left\{ \hat{P}_k \right\} S_{i,kj} - \text{Im} \left\{ \hat{P}_k \right\} S_{r,kj} \right].$$

Die Indices  $k = 1, \dots, N_f$  und  $j = 1, \dots, N_\theta$  indizieren die zugehörigen Komponenten der Matrizen bzw. des Vektors.  $\hat{P}_k$  bezeichnet die  $k$ -te Spektralkomponente der ÜTF. Da es möglich ist,  $\mathbf{S}_2$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{S}_r$  und  $\mathbf{S}_i$  zu schreiben, ist die Berechenbarkeit der analytischen Ausdrücke genau dann möglich, wenn dies auch für  $\mathbf{S}_1$  möglich ist.

Fall 3: Im dritten zu betrachtenden Fall wird der Logarithmus der Amplitude anstelle der Amplitude selbst ausgewertet, um das Problem der Gewichtung zu entschärfen:

$$\mathcal{J}_3 = \left\| \left\| \Lambda_{A/P} \begin{bmatrix} \log_{10} \left\{ |\hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta})| \right\} - \log_{10} \left\{ |\mathbf{P}_0| \right\} \\ \angle \left\{ \hat{\mathbf{P}}(\boldsymbol{\theta}) \right\} - \angle \left\{ \mathbf{P}_0 \right\} \end{bmatrix} \right\|_2 \right\|_2^2. \quad (3.21)$$

Die Kostenfunktion hängt nicht mehr von den absoluten Größen ab. Für die Gewichtung können z. B.  $2\pi$  für die Amplitude und 1 für die Phase gewählt werden. Dann haben 20 dB Unterschied in der Amplitude die gleiche Wirkung wie  $360^\circ$  in der Phase.

Die Sensitivitätsmatrix kann auch wieder symbolisch aus (3.21) berechnet werden, wenn analytische Ausdrücke für  $\mathbf{S}_r$  und  $\mathbf{S}_i$  existieren:

$$\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{A3} \\ \mathbf{S}_{P3} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

$$S_{A3,kj} = \frac{1/\ln(10)}{|P_k|^2} \left[ \text{Im} \left\{ P_k \right\} S_{i,kj} + \text{Re} \left\{ P_k \right\} S_{r,kj} \right],$$

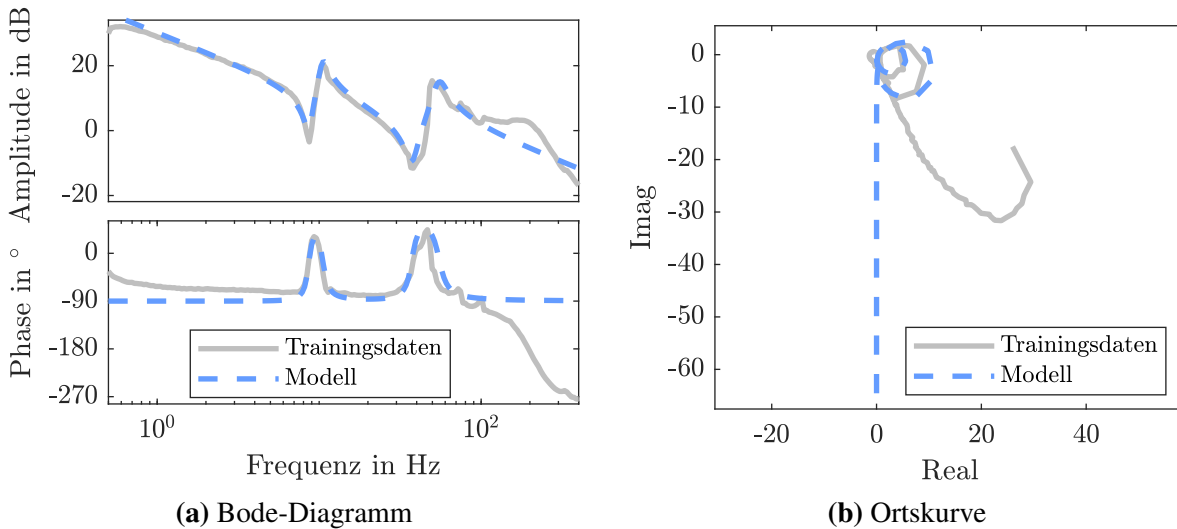
$$S_{P3,kj} = \frac{1}{|P_k|^2} \left[ \text{Re} \left\{ P_k \right\} S_{i,kj} - \text{Im} \left\{ P_k \right\} S_{r,kj} \right].$$

Sobald auf eine strikte theoretische Rechtfertigung verzichtet wird, ergeben sich viele mögliche Formulierungen der genauen Kostenfunktion. Es soll hier aber bei den drei genannten Beispielen bleiben.

### Versuche am Linearachsprüfstand

Für die Wahl einer geeigneten Kostenfunktion zur Identifikation von physikalisch motivierten Modellen werden die o. g. lokalen Kriterien der Identifizierbarkeit an einem repräsentativen Modell, einem DMS ausgewertet. Der verwendete Prüfstand ist die Linearachse und der gemessene Frequenzgang ist in Abbildung 3.1 zusammen mit dem Modell 3A1\*, siehe Tabelle 2.3, gezeigt.

Das Modell ist in rotatorischen Größen aufgestellt (Massenträgheitsmomente, Federn, Dämpfer). Auf Details der Messung und Identifikation wird später noch eingegangen.



**Abbildung 3.1:** Frequenzgang des Einachsprüfstands vs. Beispielmodell. Im Phasendiagramm ist jeder Messpunkt in ganzzahligen Vielfachen von  $360^\circ$  verschoben, sodass der Graph links etwa bei  $-90^\circ$  startet und möglichst kleine Sprünge aufweist (Aufgrund der Reibung kann die Phase auch etwas höher starten.).

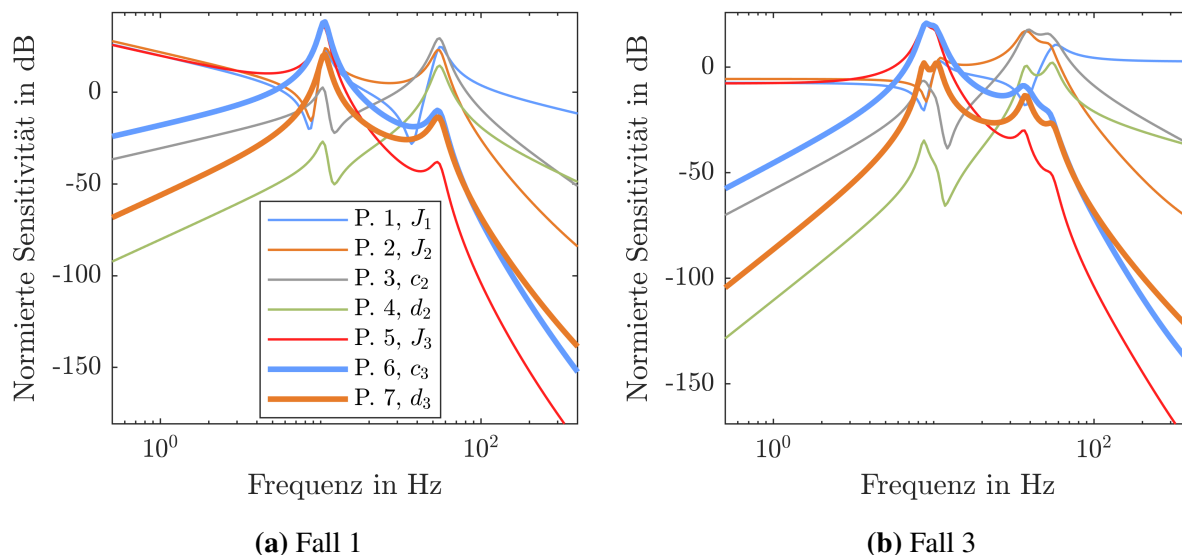
In Tabelle 3.1 sind die Zahlenwerte der oben beschriebenen Identifizierbarkeitskriterien angegeben. Dabei wurde in Fall 1 die Gewichtung weggelassen, in Fall 2 wurden Amplitude und Phase gleich gewichtet und in Fall 3 wurde die Amplitude mit  $2\pi$ , die Phase mit 1 gewichtet, für alle Frequenzen gleich. Tatsächlich werden in Fall 3 die besten (kleinsten) Werte erreicht und in Fall 1 die schlechtesten Werte, was sich mit der Beobachtung deckt, dass die separate Betrachtung von Amplitude und Phase die Robustheit der Identifikation verbessert.

**Tabelle 3.1:** Lokale Kriterien zur Bewertung der praktischen Identifizierbarkeit für das Identifikationsproblem aus Abbildung 3.1

Kriterium	gemäß Gleichung	Fall 1	Fall 2	Fall 3
$\tilde{\eta}_{\max}$	(3.7)	12	11,7	7,88
$\delta_{\max}^{\text{msqr}} / \delta_{\min}^{\text{msqr}}$	(3.4)	13,4	11,1	8,4
$\gamma$	(3.6)	7,07	7,03	5,31

Um den Unterschied in der Identifizierbarkeit in Abhängigkeit von der Kostenfunktion besser zu verstehen, ist in Abbildung 3.2 die jeweilige Sensitivitätsmatrix mit einer Linie pro Spalte, d. h. pro Parameter visualisiert. Die zwei Einträge in der Sensitivitätsmatrix, die zu einer Frequenz gehören (Amplitude und Phase bzw. Realteil und Imaginärteil) sind über die 2-Norm zu einem Wert zusammengefasst dargestellt. Zusätzlich wurde für die Abbildung jede Spalte der Sensitivitätsmatrix

mit dem identifizierten Wert des zugehörigen Parameters multipliziert, um nicht unterschiedliche physikalische Größen miteinander zu vergleichen.



**Abbildung 3.2:** Visualisierung der Sensitivitätsfunktionen für zwei verschiedene Kostenfunktionen

Im Vergleich der Abbildungen 3.2 (a) und (b) fällt auf, dass der Hauptunterschied in den Sensitivitäten der Massenträgheitsmomente ( $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$ ) bei niedrigen Frequenzen liegt. Diese sind in Fall 1 besonders hoch und identisch. Der physikalische Grund ist, dass das ungefesselte System bei niedrigen Frequenzen eine Starrkörperschwingung ausführt, deren Amplitude nur von der Summe der Massenträgheitsmomente abhängt. Im Fall 3 bleibt der Einfluss der Massenträgheitsmomente hin zu niedrigen Frequenzen zumindest konstant und nimmt nicht zu, weil die absolute Amplitude der Schwingung durch den Logarithmus verloren geht. Die starke Gewichtung der niedrigen Frequenzen, die nur eine Information über die Summe  $J_1 + J_2 + J_3$  enthält, verschlechtert die Identifizierbarkeit in Fall 1. In Fall 3 dominieren die Frequenzen im Bereich der Resonanzen, wo alle Parameter ihren eigenen, charakteristischen Verlauf zeigen. Auch in Abbildung 3.1 ist zu sehen, dass in der Ortskurve (entspricht Fall 1) der Fehler bei niedrigen Frequenzen überbetont wird, während im Bode-Diagramm (entspricht Fall 3) andere Frequenzen dominieren. Die Graphen von Abbildungen 3.2 unterscheiden sich bei dem gewählten Frequenzausschnitt allerdings nur geringfügig und so entstehen auch in Tabelle 3.1 nur kleine Unterschiede.

Die Wahl der Kostenfunktion über die Bewertung der praktischen Identifizierbarkeit hat also zu plausiblen Ergebnissen geführt. Im Kontext der Struktur- und Parameteridentifikation ist diese Methode hilfreich, um eine geeignete Kostenfunktion für ein gegebenes Problem zu finden. Bei einer reinen Parameteridentifikation wäre diese Methode nur eingeschränkt anwendbar, weil ein Modell schon identifiziert sein muss, damit die Identifizierbarkeit bewertet werden kann. Es ist möglich, dass sich bei anderen Prüfständen und Gewichtungen andere Ergebnisse ergeben.



Über die Auswertung der Sensitivitätsmatrix wird allerdings die Eignung einer Kostenfunktionen nur teilweise erfasst. Ein weiterer Aspekt ist, dass das Konvergenzverhalten bedingt durch lokale Minima unterschiedlich gut sein kann. Es ist sogar möglich, dass das globale Minimum der Kostenfunktion nicht dem Punkt im Parameterraum entspricht, der intuitiv richtig ist, z. B. weil dort die Resonanzen von Modell und Messung genau aufeinander liegen.

Aufgrund der Untersuchungen dieses Abschnittes wird im Folgenden nur noch die dritte Kostenfunktion verwendet.

### 3.2.3 Ergebnisse der Struktur- und Parameteridentifikation

Als experimentelle Validierung wird ein begrenzter Satz an Kandidatenmodellen betrachtet, wie in Abbildung 3.3 angedeutet. Aufgrund der Frequenzgang-basierten Kostenfunktionen werden gegenüber Abschnitt 2.2 nur Teilmodelle berücksichtigt, welche sich in eine lineare Übertragungsfunktion zwischen  $u$  und  $y$  integrieren lassen. Gestrichelte Linien markieren die Grenzen zwischen den Teilmodellen, die zum Teil Identifikationsparameter enthalten. Erneut entfällt der Einfachheit halber die Unterscheidung zwischen translatorischen und rotatorischen Namen, wobei es aber angesichts des rotatorischen Motors sinnvoller erscheint, von Massenträgheitsmomenten  $J_i$  zu sprechen. Alle Modelle bestehen aus einer Kette aus ein bis vier elastisch gekoppelten Massen/Massenträgheitsmomenten, wobei die Krafteinleitung und die Positionsmessung ausschließlich bei der ersten Masse geschehen, weil von dem Aufbau des Prüfstands her anzunehmen ist, dass die Elastizität in der Motorlagerung vernachlässigbar ist. Noch größere Masse-Feder-Ketten werden nicht betrachtet, weil davon ausgegangen wird, dass dann die Identifikation nicht mehr genau möglich wäre. Weitere potentielle Teilmodelle sind ein Totzeitglied mit der Zeitkonstanten  $T_t$ , sowie insgesamt maximal ein zusätzlicher Dämpfer zur Umgebung an einer der vorhandenen Massen. Dieser soll Reibung auf einfache Weise modellieren. Vor der ersten Masse gibt es kein Feder-Dämpfer-Element, um den Freiheitsgrad des Antriebs zu wahren.

Komplexere Modelle und eine noch größere Variantenvielfalt könnten berücksichtigt werden, doch die im Folgenden beschriebenen Ergebnisse zeigen, dass sich schon jetzt die einzelnen Modelle

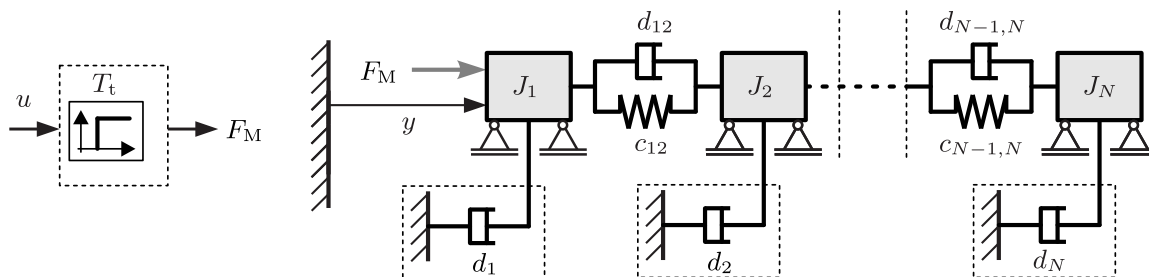


Abbildung 3.3: Klasse der Modellkandidaten als lineares Ersatzmodell

nur minimal unterscheiden und die Berücksichtigung einer sehr großen Variantenvielfalt wäre außerdem keine gute Praxis [BA98; Cha95].

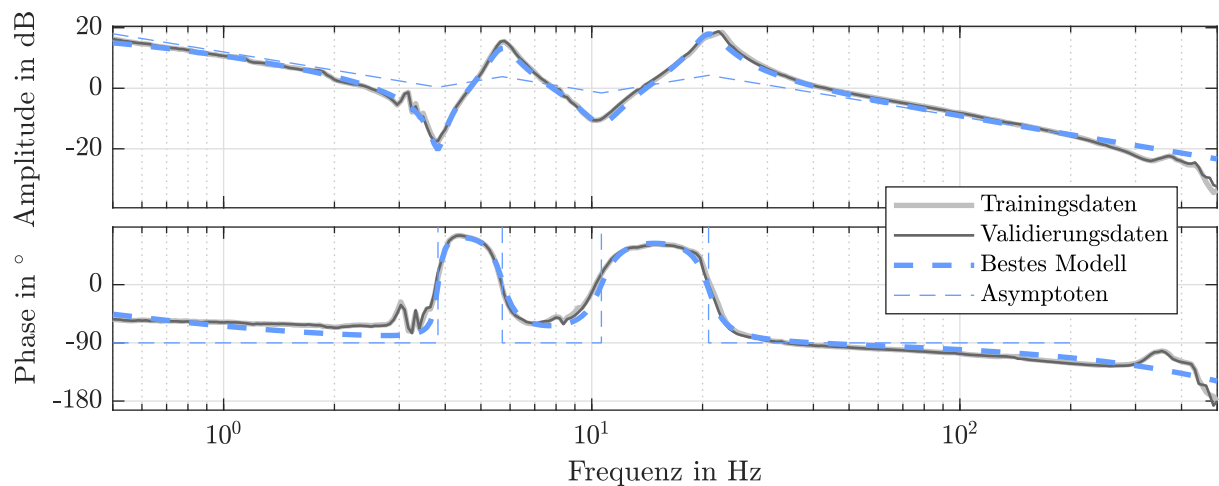
Zur Messung des Frequenzgangs wird bei  $r_1$  in Abbildung 2.3 ein gestufter Sinus eingeleitet ( $r_2 = 0$ ,  $r_3 = \text{konstant}$ ) während Ist-Drehmoment und Ist-Winkelgeschwindigkeit des Motors mit dem Goertzel-Algorithmus [SR12] ausgewertet werden. Das Ist-Drehmoment wird über den gemessenen Motorstrom und die Motorkonstante bestimmt, während die Ist-Winkelgeschwindigkeit durch numerische Differenziation aus der Winkelmessung des Resolvers am Motor zustandekommt. Bei jedem Frequenzschritt wird eine Einschwingzeit von 500 ms zugelassen, bevor die Messung beginnt, die mindestens 1 s aber nicht weniger als eine Signalperiode dauert. Diese Einstellungen stellen einen Kompromiss aus einer kurzen Versuchszeit und einer genauen Messung dar. Positions- und Geschwindigkeitsregler sind weiterhin aktiv, weil sonst die Achse angetrieben durch Gravitation, asymmetrische Reibmomente, o. ä. wegdriften würde. Die Reglerverstärkungen sind aber auf sehr niedrige Werte eingestellt, damit die Wirkung der Anregung nicht vollständig kompensiert wird und Messrauschen nicht zu großen Biasfehlern führt [SS89; Van97; Nev16].

Alle Frequenzgänge werden an den beiden in Kapitel 2 vorgestellten Prüfständen gemessen. Die Versuche am RBG werden an der  $x$ -Achse durchgeführt, während die vertikale Achse in einer Position von 2 m gehalten wird. Für Training und Validierung werden jeweils ein Frequenzgang mit gestufter Sinusanregung aufgezeichnet, wobei sich die Amplituden leicht unterscheiden. In Abbildungen 3.4(a) und 3.4(b) sind die Frequenzgänge von Training und Validierung dargestellt.

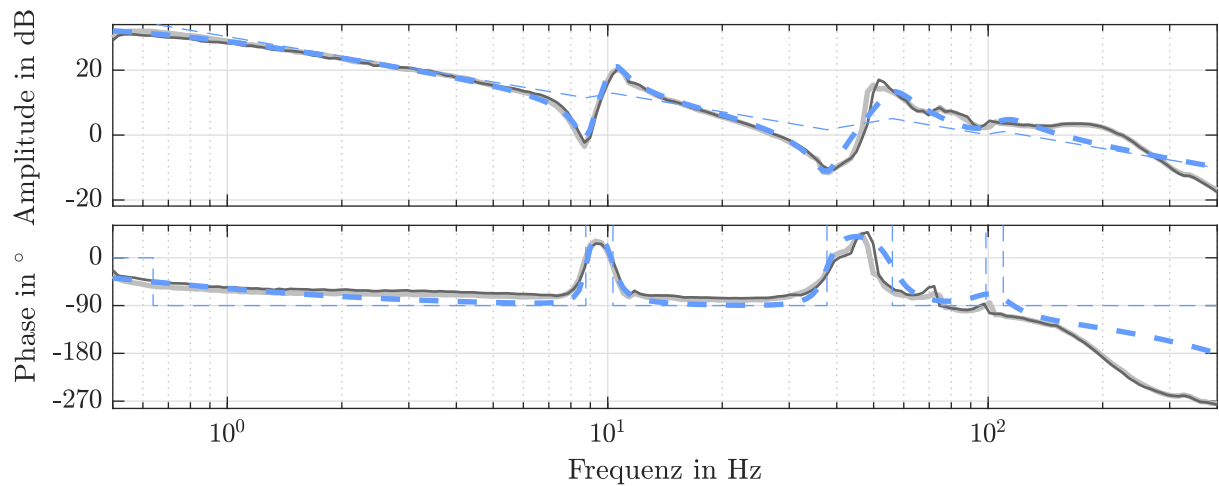
Die Parameterbereiche sind auf 1 ... 1.000 Nm/rad für Federsteifigkeiten, 0,001 ... 0,5 Nm·s/rad für Dämpfungskonstanten und 0,001 ... 1 kg m<sup>2</sup> für Trägheitsmomente festgelegt. Es wäre möglich, die Parametergrenzen genauer und für jedes potentielle Gesamtmodell individuell zu definieren. Zum Beispiel wird  $J_1$  bei einem VMS-Modell eher kleiner sein als bei einem ZMS-Modell. Eine modellspezifische Parametrierung würde aber einen unzumutbaren Parametrierungsaufwand für den Bediener darstellen. Noch weitere Parameterbereiche würden zwar die Einstellung erleichtern, haben aber in Vorversuchen mehrfach zu einer deutlich längeren Identifikationszeit geführt.

Bei der Identifikation werden die Logarithmen der Parameter optimiert und nicht die Parameter selbst. Wie in Abschnitt 3.3.2 gezeigt, kann dies bei den hier betrachteten Parametern zu einer Erleichterung der Konvergenz führen.

Die Identifikation der Parameter erfolgt mit Hilfe der einkriteriellen Partikelschwarmoptimierung (PSO), welche für besonders gute Explorationseigenschaften und die Fähigkeit in komplexen Kostenlandschaften ein Minimum zu finden bekannt ist [ES01]. Als Alternative wurde in Vorversuchen der genetische Algorithmus getestet, der in der Matlab Funktion `ga` implementiert ist. Beide Algorithmen verhielten sich ähnlich in Bezug auf Zuverlässigkeit und Rechenzeit bei vergleichbarer Parametrierung, doch der genetische Algorithmus war eher etwas langsamer. Die Anzahl der Partikel entspricht dem 200-fachen der Parameterzahl des aktuellen Modells. Jedes Modell wird zehn mal mit unterschiedlichen Anfangspartikeln identifiziert und die Ergebnisse



(a) Prüfstand RBG



(b) Linearachsprüfstand

**Abbildung 3.4:** Messung vs. bestes Modell. Jeder Messpunkt der Phase ist in ganzzahligen Vielfachen von  $360^\circ$  verschoben, sodass der Graph links etwa bei  $-90^\circ$  startet und möglichst kleine Sprünge aufweist (Aufgrund der Reibung kann die Phase auch etwas höher starten.).

mit unterlegenem Residuum an Trainingsdaten werden verworfen, wodurch sich die Gefahr, mit lokalen Minima weiterzuarbeiten, reduziert. Im Fall der Modelle mit wenigen Parametern wird das beste Residuum oft in 10 von 10 Fällen gefunden, während es bei den komplexeren Modellen nur ca. in 5 von 10 Fällen gefunden wird.

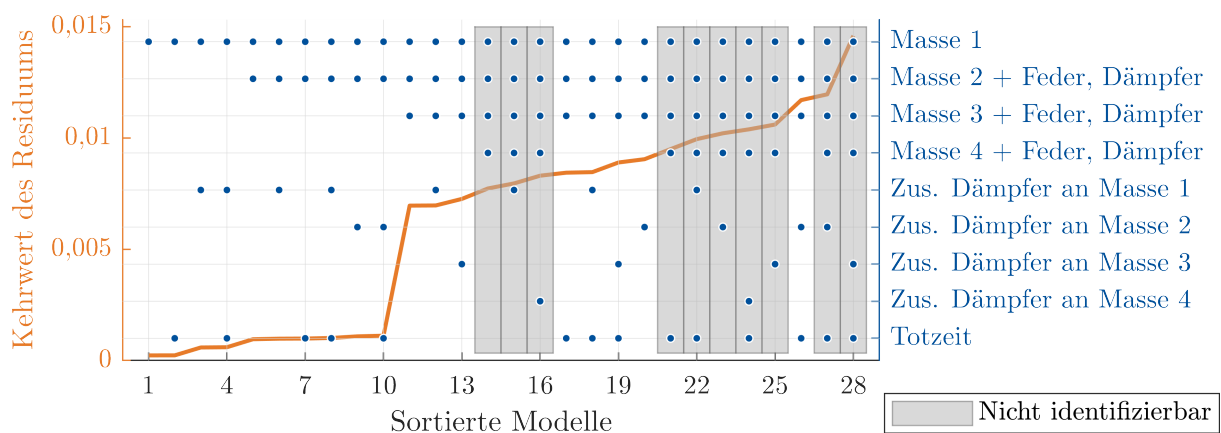
Die Kostenfunktion ist  $\mathcal{J}_3$  nach (3.21). Als Schwellwerte für praktische Identifizierbarkeit dienen: max. skaliertes Konditionsindex  $\tilde{\eta}_{\max} = 10$  (Gleichung (3.7)), max. zu min. parameter importance index  $\delta_{\max}^{\text{msqr}} / \delta_{\min}^{\text{msqr}} = 100$  (Gleichung (3.4)) und Kollinearitätsindex  $\gamma = 10$  (Gleichung (3.6)).

Die Optimierung läuft parallel auf zwölf Kernen des Rechenclusters der Leibniz Universität Hannover<sup>5</sup>. Jedes Modell wird symbolisch berechnet und in eine Kostenfunktion überführt, welche

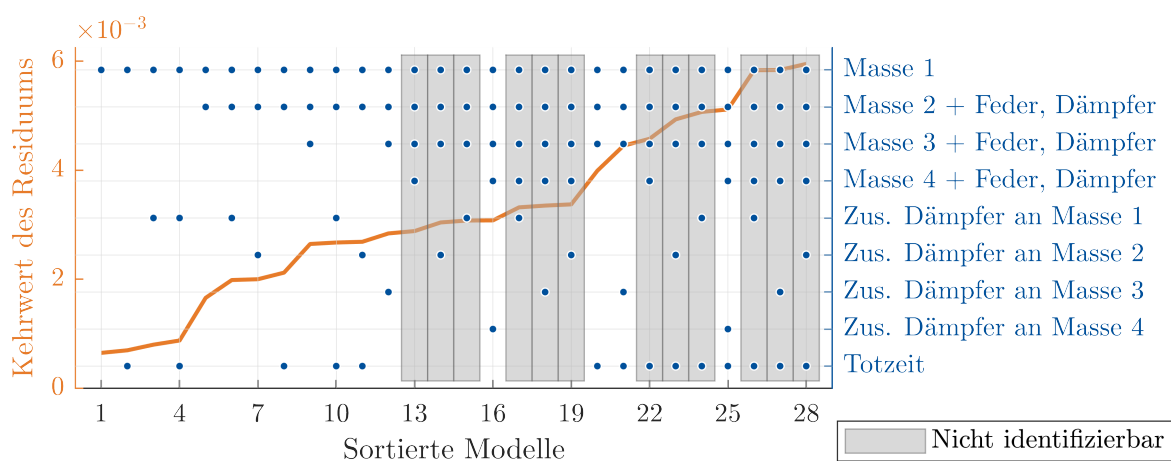
<sup>5</sup>Dieses wird durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert, Projektnummer INST 187/742-1 FUGG.

der Matlab mex-Compilers in Maschinensprache übersetzt, bevor sie wiederholt ausgewertet wird. Für den resultierenden Satz aus 28 Modellen ergibt sich eine Rechenzeit von ca. 20 h. Dabei ist der wiederholte Zeitaufwand für symbolische Berechnungen und Compiler berücksichtigt.

Die Abbildungen 3.5 und 3.6 visualisieren die Ergebnisse der Modellauswahl. In orange ist der Kehrwert des Residuums an Validierungsdaten für jedes Modell gezeigt, wobei die Modelle nach diesem Wert sortiert sind. Auf der rechten Seite stehen also die genauesten Modelle. Als blauer Punkt ist zusätzlich angegeben, welches Teilmodell jeweils enthalten ist. Zusätzlich sind als „nicht identifizierbar“ diejenigen Modelle gekennzeichnet, die mindestens ein Identifizierbarkeitskriterium nicht erfüllen und deshalb ausgeschlossen werden müssen.



**Abbildung 3.5:** Zusammensetzung der nach Genauigkeit sortierten Modelle bei der Frequenzbereichsidentifikation, Prüfstand RBG. Modelle, die mindestens ein Kriterium der praktischen Identifizierbarkeit nicht erfüllen, sind als „nicht identifizierbar“ gekennzeichnet.



**Abbildung 3.6:** Zusammensetzung der nach Genauigkeit sortierten Modelle bei der Frequenzbereichsidentifikation, Prüfstand Einzelachse. Modelle, die mindestens ein Kriterium der praktischen Identifizierbarkeit nicht erfüllen, sind als „nicht identifizierbar“ gekennzeichnet.

Beim RBG (Abbildung 3.5) ist zu sehen, dass die Genauigkeit mit zunehmender Massenzahl besser wird, dass aber die vierte Masse keine eindeutige Verbesserung mehr bringt. Außerdem sind die Modelle mit vier Massen nicht praktisch identifizierbar. Das genaueste Modell ist zwar ein Viermassenschwinger, aber durch Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit resultiert insgesamt ein Dreimassenschwinger mit Totzeit und einem Dämpfer an der zweiten Masse. Wie aus der Abbildung ersichtlich, unterscheiden sich die Modelle mit dem Dämpfer an einer anderen Stelle nur geringfügig. Der Frequenzgang des resultierenden Modells ist zusammen mit dem asymptotischen Verlauf in Abbildung 3.4(a) gezeigt. Die Übereinstimmung zu den Messungen ist augenscheinlich gut.

Das Ergebnis eines Dreimassenschwingers ist plausibel, da der Frequenzgang in Abbildung 3.4(a) eindeutig die zu erwartende Anzahl von Resonanzen und Antiresonanzen zeigt. Anders ausgedrückt: Durch die zusätzliche Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit ergibt sich eine sinnvolle Wahl der Modellkomplexität, während bei alleiniger Auswertung der Genauigkeit an Validierungsdaten ein zu komplexes Modell entstanden wäre.

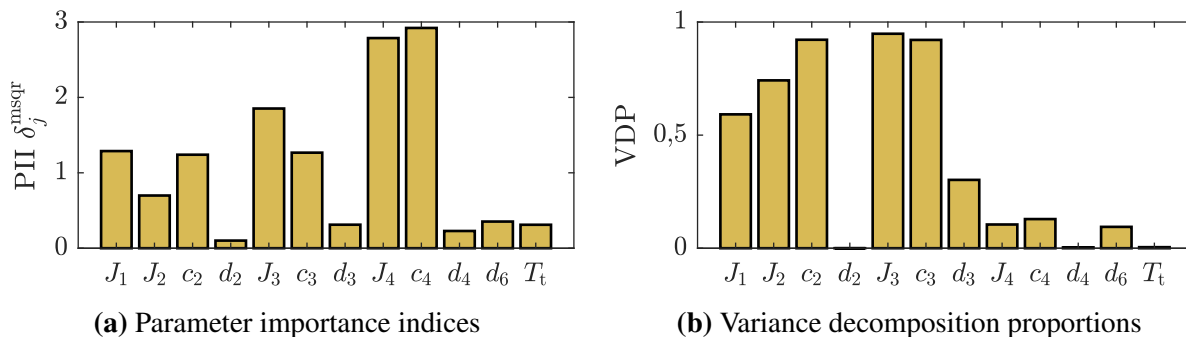
Die Position des Dämpfers lässt sich nicht leicht bewerten, weil erwartungsgemäß an mehreren Stellen im System Reibung vorliegt und nicht offensichtlich ist, wo der Einfluss auf den Frequenzgang am größten ist. Auch die Tatsache, dass sich bei dem genauesten Modell der Dämpfer an der dritten Masse befindet, welche erwartungsgemäß am wenigsten Reibung erfährt, wirft Zweifel auf, ob diese Position wirklich sicher bestimmt werden kann.

Um das Problem einer fehlenden „richtigen Lösung“ zu umgehen, wird in der Literatur manchmal vereinfachend die Messung durch eine Simulation ersetzt. Das als „wahr“ angenommene Modell vergleicht der Algorithmus mit den potentiellen Modellen. So kann der Erfolg der Methoden daran gemessen werden, wie oft das wahre Modell gefunden wird [AAA10; Alq22; KKA22]. Dies ist jedoch eine wenig praxisrelevante Fragestellung, weil in der Realität jedes Modell zwangsläufig eine Idealisierung darstellt und somit perfekte Übereinstimmung mit dem Vergleichsobjekt nie zu erwarten ist. Wenn auf eine solche Vereinfachung verzichtet wird, so wie in dieser Arbeit, ist keine abschließende Aussage über die Richtigkeit des Ergebnisses möglich.

Das Ergebnis zum Linearachsprüfstand ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Auch bei diesem Prüfstand und den gewählten Schwellwerten sind die meisten Modelle mit vier Massen nicht praktisch identifizierbar, auch wenn das beste Modell ein Viermassenschwinger ist. Der Gewinn an Genauigkeit bei Hinzunahme der dritten Masse ist nicht so auffällig wie beim RBG, was sich mit der Beobachtung deckt, dass der Frequenzgang nicht ganz dem erwarteten Verlauf eines Dreimassenschwingers folgt. Das beste Modell, wie in Abbildung 3.4(b) gezeigt, passt oberhalb von 60 Hz nicht mehr gut zu der Messung, sodass auch in diesem Fall nicht eindeutig die Richtigkeit des Ergebnisses bestätigt werden kann.

Für das Modell mit der Nummer 28 in Abbildung 3.6 soll genauer aufgezeigt werden, warum dieses nicht identifizierbar ist. Dazu sind in Abbildung 3.7(a) die PIIs nach (3.4) angegeben. Es ist zu sehen, dass die Dämpfungsparameter des Viermassenschwingers einen eher kleinen Einfluss

haben. Trotzdem ist der Unterschied zwischen dem größten und dem kleinsten PII mit 28,9 noch unterhalb des definierten Schwellwertes.



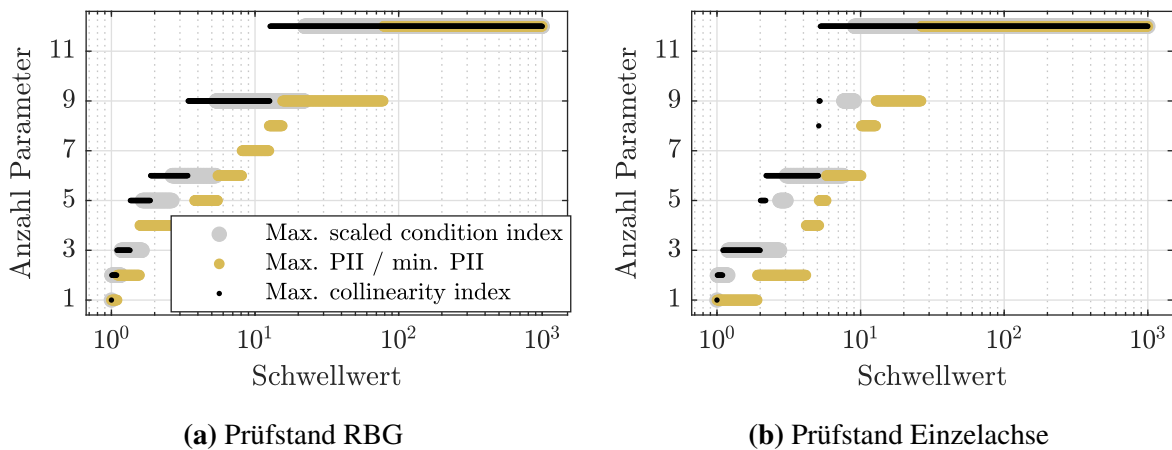
**Abbildung 3.7:** Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit für den Einachsprüfstand

Etwas zu hoch ist dagegen die Kollinearität mit  $\tilde{\eta}_{\max} = 12,8$  und  $\gamma = 7,4$ . Um zu untersuchen, welche Parameter dieses Kollinearitätsproblem verursachen, sind in Abbildung 3.7(b) die variance-decomposition proportions nach [Bel91] für  $\tilde{\eta}_{\max}$  gezeigt. Die längsten Säulen markieren die Parameter, die an dem Kollinearitätsproblem hauptsächlich beteiligt sind. Offensichtlich sind dies einige der Parameter des Feder-Masse-Dämpfer-Systems. In dem zugehörigen Frequenzgang (ähnlich dem des besten Modells in Abbildung 3.4(b)) ist die Resonanz bei 100 Hz nur schwach ausgeprägt. Es scheint also plausibel, dass diese Parameter nicht sicher identifizierbar sind. Ähnlich ist es bei den anderen VMS-Modellen. Nur bei Modell 25 liegt der Wert  $\tilde{\eta}_{\max} = 9,1$  gerade unterhalb der Grenze von 10.

### 3.2.4 Schwellwert-Abhängigkeiten

Die Ergebnisse haben gezeigt, dass besonders bei dem Einzelachsprüfstand eine empfindliche Abhängigkeit von den genauen Schwellwerten der Identifizierbarkeitskriterien besteht. Um diese weiter zu untersuchen, wird jedes der drei Kriterien allein angewendet (Abbildungen 3.8(a) und 3.8(b)). Der Schwellwert wird zwischen 1 und 1.000 variiert, auch wenn dieser weite Wertebereich nicht bei allen drei Kriterien sinnvoll ist. Für jeden Wert wird unter allen Modellen, die dieses Kriterium erfüllen, das Modell mit dem geringsten Kostenfunktional (weiterhin definiert wie in Abschnitt 3.2.3) an Validierungsdaten ausgewählt. Dargestellt ist die Anzahl der Schätzparameter dieses Modells.

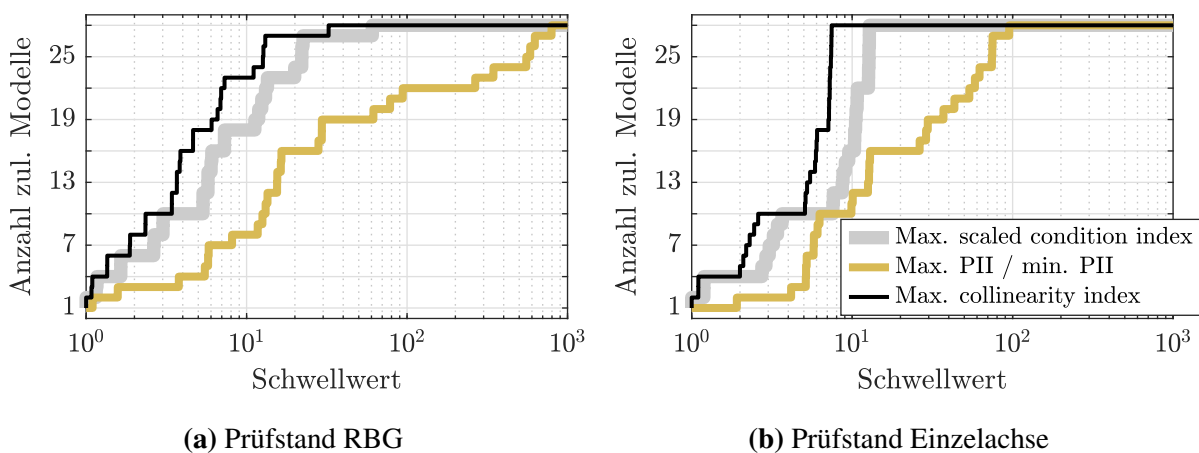
Offensichtlich besteht eine starke Abhängigkeit von den Schwellwerten und meist steigt die Anzahl der Parameter mit zunehmendem Schwellwert, also geringeren Anforderungen an die Identifizierbarkeit. Dies entspricht der Erwartung, dass durch die Berücksichtigung der praktischen Identifizierbarkeit je nach Schwellwert die Modellkomplexität reduziert wird. Beim RBG ergibt sich für einen weiten Bereich ein Dreimassenschwingermodell mit 9 Parametern, während bei dem



**Abbildung 3.8:** Anzahl der Schätzparameter des besten Modells für einen bestimmten Schwellenwert des einen aktuellen Kriteriums

Linearachsprüfstand das resultierende Modell stärker von dem tatsächlich gewählten Schwellenwert abhängt.

In Ergänzung zu Abbildung 3.8 gibt Abbildung 3.9 die Anzahl der Modelle an, die ein bestimmtes Kriterium erfüllen. Durch die zunehmende Relaxation der Anforderungen von links nach rechts entstehen zwangsläufig monoton steigende Funktionen.



**Abbildung 3.9:** Anzahl der Modelle, die das betrachtete Kriterium erfüllen, abhängig vom Schwellenwert. Insgesamt gibt es 28 Modelle.

Im Vergleich der beiden Teilabbildungen kann gesagt werden, dass beim Einachsprüfstand eine Variation der Schwellenwerte im relevanten Bereich einen größeren Effekt hat und somit die genaue Wahl des Schwellenwertes besonders kritisch ist. Außerdem ist zu sehen, dass beim RBG erst für sehr hohe Werte der Grenzen alle Modelle als identifizierbar gelten würden. Der Grund ist, dass eine ausgeprägte dritte Resonanz fehlt, die für die sichere Identifikation eines VMS erforderlich wäre.

Diese Abbildung zeigt also auch, dass die Berücksichtigung der Identifizierbarkeit eine Auswahl unnötig komplexer Modelle verhindert.

Es wird aus beiden Abbildungen, 3.8 und 3.9, deutlich, dass bei demjenigen Prüfstand eine besonders starke Abhängigkeit von dem gewählten Grenzwert besteht, bei dem auch visuell nicht sicher gesagt werden kann, um welches Modell es sich handelt. Während auf den ersten Blick der Frequenzgang des RBGs nach einem Dreimassenschwinger aussieht, könnte im anderen Fall auch ein einfaches oder komplexeres Modell sinnvoll sein.

Was durch diese Abbildung nicht deutlich wird, ist das *Zusammenspiel* der drei Kriterien. Wenn z. B. durch das erste Kriterium andere Modelle ausgeschlossen werden als durch das zweite, kann es passieren, dass ein überraschend einfaches Modell entsteht, wenn alle Kriterien gleichzeitig erfüllt sein müssen.

Insgesamt haben die Experimente zur Struktur- und Parameteridentifikation im Frequenzbereich ergeben, dass der untersuchte Ansatz zu plausiblen Ergebnissen führt, dass aber eine starke Abhängigkeit der resultierenden Modellkomplexität von den gewählten Schwellwerten besteht. Insbesondere wenn unterschiedliche Interpretationen der Daten visuell betrachtet sinnvoll erscheinen, wird der Algorithmus je nach Schwellwert auch unterschiedliche Modelle ausgeben. Diese Tatsache erschwert die Wahl der genauen Schwellwerte im Voraus.

Es hat sich gezeigt, dass manchmal einzelne Parameter, z. B. die Dämpfungsparameter, nur ungenau zu identifizieren sind und zum Ausschluss führen, während andere Parameter des gleichen Teilmodells durchaus gut bestimmt werden können und das Teilmodell insgesamt auch stark zur Verbesserung der Genauigkeit beitragen würde. Hier wären auch andere Strategien für den Übergang von Parameteruntersuchungen zu Entscheidungen über den Einschluss/Ausschluss von Teilmodellen denkbar. Zum Beispiel könnten Parameter festgelegt werden, deren Identifizierbarkeit ignoriert wird o. ä.

Insgesamt ist das Frequenzbereichsverfahren von überschaubarer Komplexität und die Anzahl der Modellkandidaten scheint angemessen. Dadurch lassen sich die Ergebnisse noch weitgehend plausibilisieren. Im nächsten Abschnitt soll die Komplexität gesteigert werden, insb. durch mehr Varianten und durch die Zeitbereichsidentifikation.

### 3.3 Verfahren im Zeitbereich

In diesem Abschnitt wird auf die Beschränkung auf Übertragungsfunktionsmodelle verzichtet, sodass auch Reibung, Gravitation und Lose berücksichtigt werden können. Dies wird durch eine Zeitbereichsidentifikation ermöglicht. Dadurch ändert sich die Berechnung der Sensitivitätsmatrix, wie in Abschnitt 3.3.1 beschrieben und die Validität der linearen Näherungen muss besonders betrachtet werden (Abschnitt 3.3.2). Schließlich wird die Strukturoptimierung experimentell validiert. Die Ausführungen wurden in Teilen als [TPP+] publiziert.



### 3.3.1 Algorithmischer Ablauf

Der Ablauf entspricht weiterhin der Beschreibung in Abschnitt 3.2.1. Es unterscheiden sich nur die Berechnung der Kostenfunktion und der Sensitivitätsmatrix.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Kostenfunktion ist die nichtlineare Zustandsraumdarstellung der Modelle (hier der Einfachheit halber nur für SISO Modelle ausgeführt):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\theta}), \\ \hat{y} &= g(\mathbf{x}(t), u(t), \boldsymbol{\theta})\end{aligned}\tag{3.23}$$

mit Eingang  $u(t)$ , Zustandsvektor  $\mathbf{x}$  und Schätzparameter-Vektor  $\boldsymbol{\theta}$ . Für die Berechnung des Modellausgangs über die Zeit muss eine Zeitschrittsimulation durchgeführt werden, wofür verschiedene Methoden verwendet werden können [Ada14; Jan10]. Bei der expliziten Methode nach Euler wird ausgehend von einem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  die Ausgangsgröße für äquidistante Zeitpunkte (Abtastzeit  $T_{\text{sys}}$ ) berechnet:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + T_{\text{sys}} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, u_k, \boldsymbol{\theta}), \\ \hat{y}_k &= g(\mathbf{x}_k, u_k, \boldsymbol{\theta}).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Die Kostenfunktion vergleicht Modellausgang  $\hat{y}(kT_{\text{mess}})$  und Messung  $y_0(kT_{\text{mess}})$  für alle Messzeitpunkte, während das System geeignet angeregt wird:

$$\mathcal{J} = \|(\hat{y}_1(\boldsymbol{\theta}), \hat{y}_2(\boldsymbol{\theta}), \dots, \hat{y}_{N_m}(\boldsymbol{\theta})) - (\hat{y}_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,N_m})\|_2^2.\tag{3.25}$$

Bei mehreren Sensoren mit unterschiedlichen physikalischen Einheiten müssten diese zusätzlich durch eine Gewichtung o. ä. berücksichtigt werden.

Für die Berechnung der Sensitivitätsmatrix, die nun die Abhängigkeit der Ausgangstrajektorie von den Parametern beschreibt und deshalb auch *trajectory sensitivity matrix* genannt wird, haben sich besonders die finite-Differenzen-Methode und die Lösung der Sensitivitäts-Differenzialgleichung als Anfangswertproblem bewährt [AG21].

Die *Sensitivitäts-Differenzialgleichung* ergibt sich durch Ableitung der Ausgangsfunktion des Modells nach den Parametern [Boh00; GVB17]:

$$\frac{dg}{d\boldsymbol{\theta}} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}},\tag{3.26}$$

abhängig von der Zustandssensitivität  $\mathbf{S}_x = d\mathbf{x}/d\boldsymbol{\theta}$ . Für diese kann eine Differenzialgleichung aufgestellt werden, wenn angenommen wird, dass die Ableitung von  $\mathbf{x}$  nach  $\boldsymbol{\theta}$  mit der nach  $t$  vertauscht werden darf [Boh00]<sup>6</sup>:

$$\underbrace{\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{d\boldsymbol{\theta}}}_{\dot{\mathbf{S}}_x} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{d\boldsymbol{\theta}}}_{\mathbf{S}_x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (3.27)$$

Unter Verwendung der Euler-Diskretisierung mit Abtastzeit  $T_{\text{sens}}$  kann die Zeitfunktion der Sensitivität ausgehend von gegebenen Anfangswerten als Zeitschrittsimulation berechnet werden:

$$\underbrace{\frac{d\mathbf{x}_{k+1}}{d\boldsymbol{\theta}}}_{\mathbf{S}_{x,k+1}} = \underbrace{\frac{d\mathbf{x}_k}{d\boldsymbol{\theta}}}_{\mathbf{S}_{x,k}} + T_{\text{sens}} \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}_k}{d\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)}_{\dot{\mathbf{S}}_{x,k}}. \quad (3.28)$$

Aus (3.26) resultiert dann die Ausgangssensitivität, die für jeden Zeitschritt berechnet und in Übereinstimmung mit der Kostenfunktion (3.25) zur gesamten Sensitivitätsmatrix  $\mathbf{S}_{\text{nl}}$  gestapelt werden muss:

$$\mathbf{S}_{\text{nl}} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{y,1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}_{y,N_m} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}_{y,k} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{S}_{x,k} + \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\theta}}. \quad (3.29)$$

In die partiellen Ableitungen werden  $\mathbf{x}_k$  für  $\mathbf{x}$ ,  $u_k$  für  $u$  und  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ , also der identifizierte Parametervektor, für  $\boldsymbol{\theta}$  eingesetzt. Dies erfordert, dass zuvor die Simulation der Systemzustände durchgeführt wurde [Boh00; GVB17].

Die Vorgabe der Anfangswerte für den Systemzustand  $\mathbf{x}_0$  und für die Zustandssensitivität  $\mathbf{S}_{x,0}$  erfordert reproduzierbare Startbedingungen. Im Fall der hier betrachteten mechanischen Systeme ist es sinnvoll, an einer definierten Position aus dem Stillstand heraus zu starten, nachdem die Startposition aus einer definierten Richtung angefahren wurde, um die Position im Losespalt zu definieren. Dann können die Anfangszustände näherungsweise unabhängig von den Parametern vorgegeben werden und die Anfangssensitivitäten sind null.

Der zweite Ansatz, die *finite-Differenzen-Methode* setzt nacheinander für jeden Parameter zwei leicht unterschiedliche Werte um den zuvor identifizierten Wert ein und führt jeweils die Simulation nach (3.24) durch. Aus dem Steigungsdreieck/Differenzenquotient ergibt sich direkt die Ausgangssensitivität des Parameters, also die zugehörige Spalte der Sensitivitätsmatrix. Hier wird diese Methode dann verwendet, wenn die Gleichungen so komplex sind, dass die symbolische Berechnung der Ableitungen nicht möglich ist, wenn ein Modell Lose enthält und wenn Schätzparameter

<sup>6</sup>Dies ist nach dem Satz von Schwarz dann der Fall, wenn die zweiten partiellen Ableitungen im betrachteten Punkt stetig sind und trifft in der Praxis fast immer zu [Kön04].

nicht explizit in den System- und Ausgangsgleichungen enthalten sind. Lose würde aufgrund der schaltenden Funktionen Probleme mit der Ableitungsberechnung verursachen.

Es kann vorkommen, dass der simulierte Verlauf für leicht unterschiedliche Loseweiten exakt gleich ist und der Differenzenquotient somit falsch berechnet wird. Dies liegt daran, dass die Losefunktion (2.9) nur zu diskreten Zeitschritten ausgewertet wird und der Loseparameter nur indirekt über die Fallunterscheidung eingeht. Zur Lösung dieses Problems wird in der Simulation nach jedem Zeitschritt der Losezustand auf das Intervall  $[-2\alpha, 0]$  begrenzt. So hat der genaue Parameterwert immer einen Einfluss und der Differenzenquotient kann für den Loseparameter verwendet werden.

Bzgl. der Totzeit ist anzumerken, dass der Parameter  $T_t$  nicht direkt in der System- oder Ausgangsfunktion auftaucht und nur durch die nachträgliche Verschiebung der Signale berücksichtigt wird. Für den Parameter  $T_t$  muss daher auch die finite-Differenzen-Methode genommen werden.

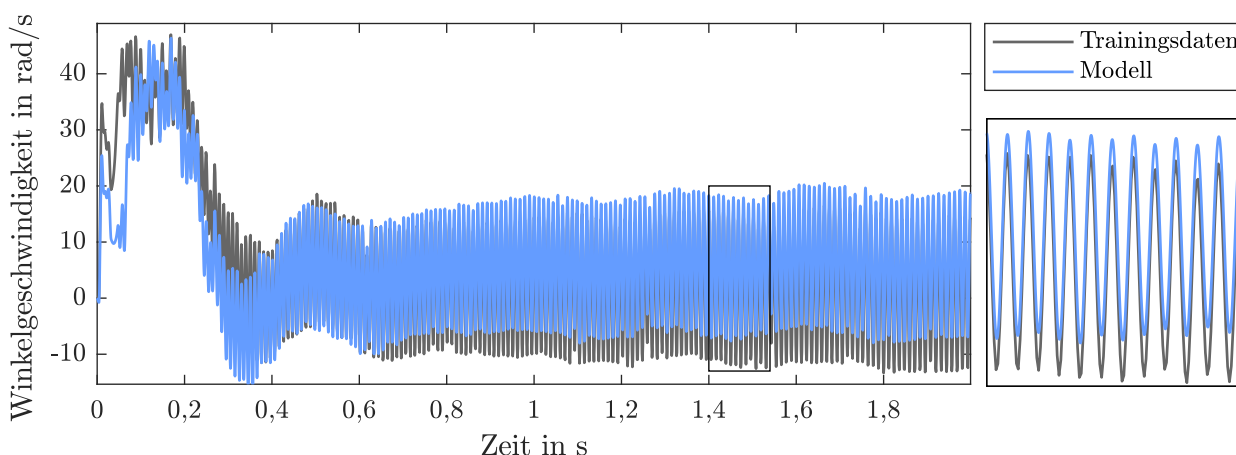
### 3.3.2 Überprüfung der linearen Näherung

Wie in Abschnitt 3.1.3 bereits angekündigt und theoretisch motiviert, sollen die Abweichungen der Kostenfunktion von der einer ideal parameterlinearen Regression untersucht werden. Dies geschieht hier für ein repräsentatives Testmodell, einen DMS mit Reibung und Totzeit.

Als Trainingstrajektorie dient das in Abb. 3.10 gezeigte Multisinus-Signal (MFE) [MPRL07]. Dabei handelt es sich um eine Summe von Sinusschwingungen mit äquidistanter Frequenzeinteilung und einheitlicher Amplitude. Die Phasen sind so optimiert, dass der Scheitelfaktor, d. h. das Verhältnis von maximalem Betrag zu Effektivwert, minimiert wird. In diesem Versuch wird ein solches Signal als Drehmomentvorsteuerung verwendet, während Geschwindigkeitsregler und Positionsregler schwach eingestellt sind. Der resultierende Scheitelfaktor des Systemausgangs, also Position oder Geschwindigkeit, wird nicht bei der Optimierung der Phasen berücksichtigt. Ein verfeinertes Verfahren wird in [TPWOc] vorgestellt.

Für die Simulation der dynamischen Modelle und auch der Sensitivitäten beträgt die Abtastrate  $T_{\text{sys}} = 10 \text{ kHz}$ , was ca. um den Faktor 100 über den zu erwartenden Resonanzfrequenzen vergleichbarer Systeme liegt. Es wird die Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung für die Simulation der Systemzustände verwendet, weil mit dieser bei vergleichbaren Systemen gute Genauigkeiten erreicht wurden [Bec17]. Zur Berechnung der Sensitivitäten wird bei dem Parameter  $T_t$  der Differenzenquotient verwendet und ansonsten die Lösung der Sensitivitäts-Differenzialgleichung über Zeitschrittintegration berechnet, siehe (3.28). Die Beschränkung auf die weniger genaue Euler-Methode ist dadurch begründet, dass die Sensitivitäten nur als Identifizierbarkeitsindikator dienen. Als Optimierer für die Parameteridentifikation in der PL Methode wurden PSO und der genetische Algorithmus von Matlab getestet und sie ergaben beide die gleichen Funktionen.

Bei manchen Parametern wird nicht der Wert des Parameters selbst optimiert, sondern dessen natürlicher Logarithmus. Es wird erwartet, dass dadurch eher eine näherungsweise symmetrische



**Abbildung 3.10:** Gemessener Systemausgang der Trainingsdaten (MFE-Anregung) vs. Modellausgang des identifizierten Modells mit Vergrößerung rechts

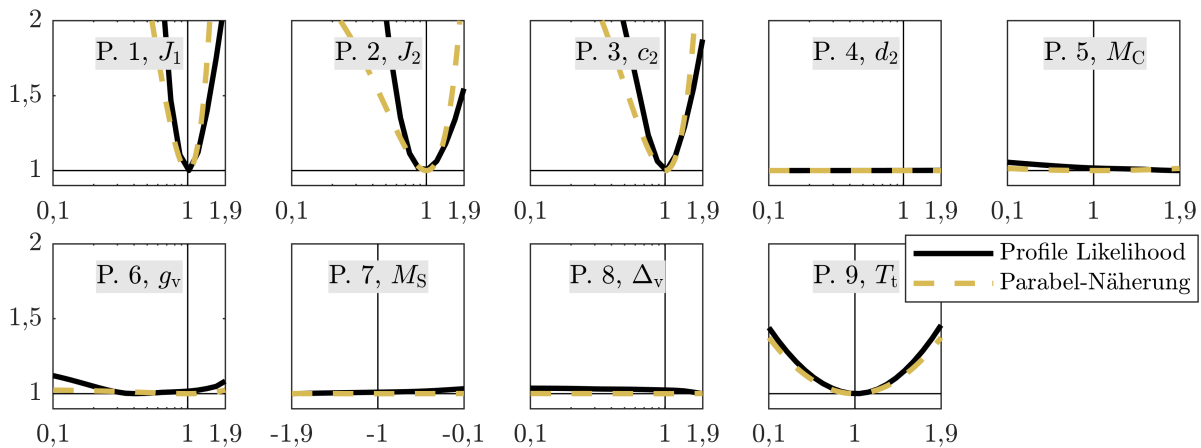
Zunahme der Kostenfunktion ausgehend von dem Optimum in beide Richtungen entsteht<sup>7</sup>. Dies erleichtert es dem PSO, das Optimum durch Auswerten von zufälligen Parametervektoren zu finden. Für die hier durchgeführten Versuche ist vereinbart, dass bei Parametern mit einer unteren Grenze größer als null nach dem Logarithmus des Parameterwertes zu suchen ist und sonst nach dem Parameterwert selbst.

Für die PL Methode werden die Parameter im Bereich 10 ... 190 % des zuvor identifizierten Wertes ausgewertet, wobei die Einteilung bei den in der Identifikation logarithmisch repräsentierten Parametern auch wieder logarithmisch ist, d. h. bei kleineren Werten sind besonders viele Stützpunkte vorhanden.

Abbildung 3.11 zeigt die resultierenden PL Plots basierend auf dem Trainingsdatensatz. Auch hier wird bei der Skalierung der  $x$ -Achse zwischen linear und logarithmisch unterschieden. Es zeigt sich, dass alle Parameter mit Ausnahme der Reibungsparameter  $\{g_v, M_C, M_S, \Delta_v\}$  und der Dämpfung  $d_2$  gut identifizierbar sind. Offensichtlich ist die Reibung für die gegebene dynamische Anregung überparametrisiert. Im Fall der Dämpfung ist der Grund für die fast vollständig flache Kurve, dass sich bei der Identifikation ein sehr kleiner Wert ergeben hat und entsprechend auch der betrachtete Bereich sehr klein ist.

Tatsächlich zeigen die asymptotischen Näherungen nach Abschnitt 3.1.3, die ebenfalls in Abb. 3.11 dargestellt sind, im Optimum einen ähnlichen Verlauf und sie lassen ähnliche Schlüsse über die Identifizierbarkeit der Parameter zu. Bei den logarithmisch eingeteilten Parametern  $J_1, J_2, c_2$  und

<sup>7</sup>In dem einfachen Beispiel  $y = \theta_1/\theta_2$  führt die Logarithmierung in Kombination mit den Ersatzparametern  $\theta'_1 = \ln(\theta_1), \theta'_2 = \ln(\theta_2)$  zu besonders einfachen Verhältnissen:  $\ln(y) = \ln(\theta_1) - \ln(\theta_2) = \theta'_1 - \theta'_2$ . Die transformierte Kostenfunktion ist nun linear in den Parametern, was gemäß Abschnitt 3.1.3 zu parabelförmigen Profile Likelihood- und conditional likelihood Plots führt. Wenn  $y$  anstelle von  $\ln(y)$  verwendet wird, ist die Kostenfunktion immer noch symmetrisch um das Optimum. Bei komplexeren Funktionen zeigen sich häufig ähnliche Tendenzen, auch wenn weder im linearen, noch im nichtlinearen Maßstab exakt symmetrische Verhältnisse entstehen.



**Abbildung 3.11:** Profile Likelihood Plots entsprechend Abbildung 3.10. Die Abszisse gibt die Größe des jeweiligen Parameters in Vielfachen des zuvor identifizierten Wertes an. Die Abszisse der logarithmisch repräsentierten Parametern ist auch hier logarithmisch dargestellt. Die Ordinate gibt den Wert der Kostenfunktion in Vielfachen des Optimums an.

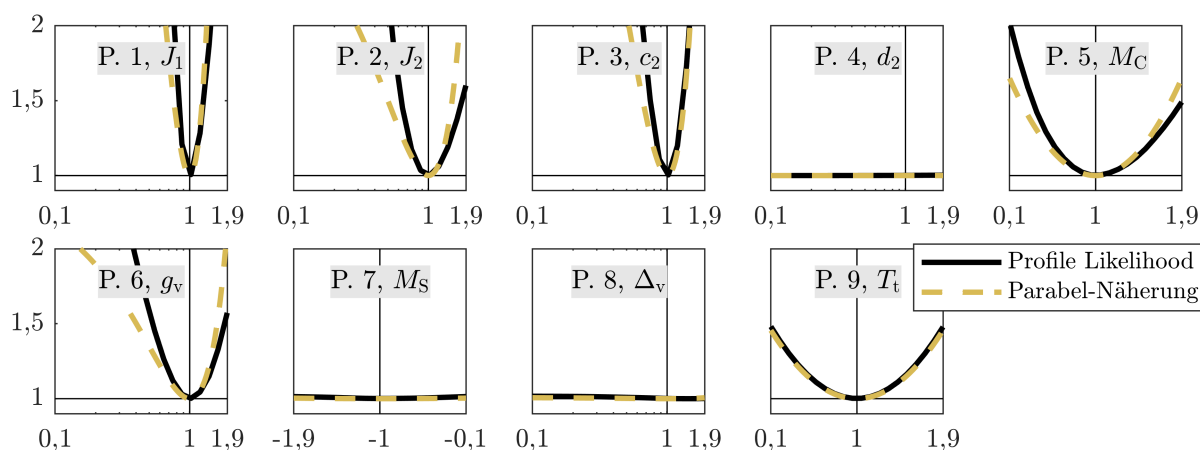
$g_v$  sehen die Parabel-Näherungen bedingt durch die Skalierung der  $x$ -Achse nicht parabelförmig aus. Dafür sind die genauen Verläufe in dieser Darstellung fast parabelförmig. Dies bestätigt, dass bei diesen Parametern eine logarithmische Einteilung sinnvoll ist. In der linearen Darstellung wäre der linke Rand deutlich steiler als der rechte.

Zusätzlich ist in Abbildung 3.12 der Vergleich von genauen Funktionen und Parabel-Näherungen für den Fall gezeigt, dass nur der betrachtete Parameter variiert wird, während die anderen Parameter konstant gehalten werden. Zunächst fällt auf, dass dabei zusätzlich die Parameter  $M_C$  und  $g_v$  einen näherungsweise parabelförmigen Verlauf zeigen. Die anderen Parabeln sind teilweise steiler geworden. Dies zeigt, dass gerade bei den Parametern  $M_C$  und  $g_v$  ein Kollinearitätsproblem vorliegt. Außerdem ist auch hier eine gute Übereinstimmung zwischen den exakten Verläufen und den Parabel-Näherungen festzuhalten.

Das Fazit dieser Beispieluntersuchung ist, dass die Parabel-Näherungen in zufriedenstellender Übereinstimmung mit den PL Plots sind. Daher sollen im weiteren nur noch die lokalen Kriterien berücksichtigt werden.

### 3.3.3 Ergebnisse der Strukturoptimierung

Die Struktur- und Parameteridentifikation wird nun am Linearachsprüfstand durchgeführt. Im Gegensatz zur Veröffentlichung [TPP+] wird keine MFE-Anregung gewählt, sondern eine, die ohne Geschwindigkeits- und Positionsregler auskommt und möglichst deutlich den Einfluss der Lose zeigen soll: Geschwindigkeits- und Positionsregler sind ausgeschaltet, während im Wechsel ein oberer und ein unterer Sollstrom vorgegeben werden, sodass der Schlitten abwechselnd positiv und



**Abbildung 3.12:** Schnitte durch die Kostenfunktion, d. h. der betrachtete Parameter wird variiert, während alle anderen Parameter auf dem identifizierten Wert gehalten werden. Die Bedeutung der Achsbeschriftungen ist wie in Abbildung 3.11.

negativ beschleunigt. Der Mittelwert beider Sollströme wurde zuvor als Haltestrom im Stillstand gemessen, was bei vertikalen Achsen noch relevanter wäre. Die Umschaltzeitpunkte sind so gewählt, dass ein vorgegebener Bereich für Position und Geschwindigkeit nicht verlassen wird. Dabei unterscheiden sich die Einstellungen leicht zwischen Trainings- und Validierungsdaten, vgl. Abb. 3.13 vs. 3.16. Vor der Messung wird ein kurzes Stück langsam in negative Richtung gefahren, damit der Lose-Anfangszustand mit null initialisiert werden kann.

Als Modelle werden Mehrmassenschwinger mit ein bis drei Massen betrachtet sowie optional Lose zwischen der ersten und zweiten Masse. Zusätzlich existiert die Option auf Gravitation in Koordinatenrichtung und getrennt viskose bzw. COULOMB'sche Reibung an der ersten Masse.

Der Optimierungsalgorithmus PSO ist auf max. 2.000 Iterationen und 200 Partikel pro Parameter eingestellt. Wie in Abschnitt 3.2 wird jedes Modell zehn mal mit unterschiedlichen Anfangspartikeln identifiziert und nur das Ergebnis mit dem besten Residuum weiter verwendet. Bei der Identifikation werden wieder diejenigen Parameter logarithmisch repräsentiert, deren zulässige Bereiche ausschließlich positiv sind, während bei den anderen Parametern der lineare Maßstab verwendet wird. In Übereinstimmung damit lauten die Grenzen  $J_i = 0,001 \dots 1 \text{ kg m}^2$ ,  $c_i = 1 \dots 1000 \text{ Nm/rad}$ ,  $d_i = 0,001 \dots 1 \text{ Nms/rad}$ ,  $\alpha_L = 0,001 \dots 1 \text{ rad}$ ,  $M_C = 0 \dots 1 \text{ Nm}$  und  $M_G = -1 \dots 1 \text{ Nm}$ .

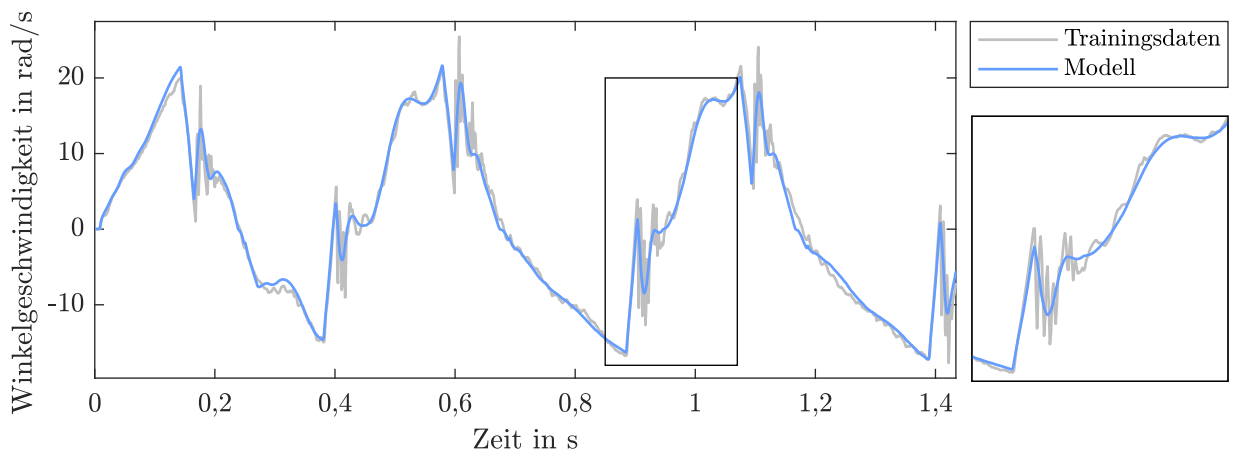
Für die Berechnung der Sensitivitätsmatrix dient die Sensitivitäts-Differenzialgleichung, sofern keine Lose vorhanden ist. Bei Modellen mit Lose wird aufgrund der Unstetigkeiten der Funktionen für alle Parameter der Differenzenquotient verwendet, wobei die Breite des Steigungsdreiecks 0,1 % vom zulässigen Parameterbereich ist.

In Abbildung 3.13 ist die zur Identifikation verwendete Trajektorie zusammen mit dem genauesten Modell an Trainingsdaten gezeigt. Es ist gleichzeitig das komplexeste betrachtete Modell. Die oberen und unteren Spitzen in der Geschwindigkeit markieren die Zeitpunkte der Sollstrom-Wechsel, was etwa den Drehmoment-Wechseln entspricht. Insgesamt ist die Übereinstimmung gut, aber in der Vergrößerung auf der rechten Seite ist zu erkennen, dass der Loseeffekt durch das Modell nicht ganz richtig wiedergegeben wird. Nach dem Losedurchgang entstehen im Geschwindigkeitssignal charakteristische Schwingungen im Bereich 250 Hz, welche das Modell nicht zeigt. Dies könnte an dem elastischen Stoß beider Hälften der Losekupplung liegen, welche nicht perfekt masselos ist. Hier ein Modell mit einer besseren Übereinstimmung zu finden wäre erwartungsgemäß schwierig, weil bei der genutzten Kostenfunktion im Zeitbereich in Kombination mit der hohen Schwingfrequenz schon eine leichte zeitliche Abweichung zwischen Modell und Messung zu einer deutlichen Verschlechterung des Residuums führen würde. Beispielsweise würde ein Zeitversatz von 2 ms gegenphasiges Verhalten bedeuten.

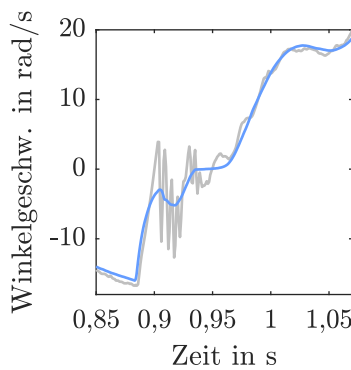
In Abbildung 3.13 ist zusätzlich die Ausgangsgröße für drei vereinfachte Modelle gezeigt. Die Modellvereinfachungen ergeben sich aus dem vollständigen Modell nach Weglassen einzelner Teilmodelle. Damit kann die Wichtigkeit der verschiedenen physikalischen Effekte gezeigt werden, auch wenn eine solche Darstellung nicht für alle Teilmodelle möglich ist. Es zeigt sich, dass ohne Lose die Spitze in der Geschwindigkeit nach dem Drehmoment-Wechsel nicht erklärt werden kann. Andererseits ist ohne COULOMB'sche Reibung ein Versatz in der Geschwindigkeit im weniger dynamischen Teil der Trajektorie zu erkennen, der sich besonders im oberen Bereich zeigt. Ohne die dritte Masse wird das Schwingverhalten in den Bereichen konstanter Beschleunigung nicht richtig wiedergegeben. Die Teilmodelle zeigen also alle ein charakteristisches und unverwechselbares Verhalten.

In Abbildung 3.14(a) sind die Residuen des Modells aus Abbildung 3.13(a) und der verschiedenen Modellvereinfachungen auf Basis der Trainingsdaten dargestellt. Es ist zu sehen, dass das Modell ohne Lose ein deutlich größeres Residuum aufweist, obwohl das Losemodell den gemessenen Effekt nicht genau wiedergeben kann. Die Zunahme des Residuums bei Vereinfachung zeigt, dass alle Teilmodelle gerechtfertigt sind, mit Ausnahme der Gravitation.

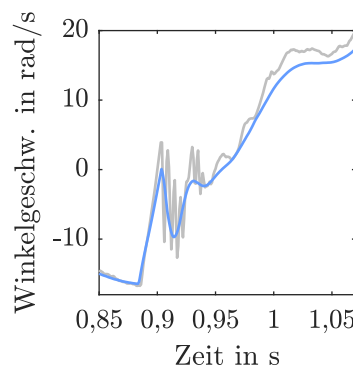
In einem Zusatzexperiment, auf das hier nicht im Detail eingegangen werden soll, wurde nicht die Aufteilung in viskose und COULOMB'sche Reibung in Teilmodellen abgebildet, sondern die Position der Reibung. Das Ergebnis zeigt Abbildung 3.14(b). Nun führt die Einsparung eines der Reibmodelle nur zu einer minimalen Zunahme des Residuums, was darauf hindeutet, dass eine solche Aufteilung eine Überparametrierung darstellt. Es ist nicht möglich, mit dieser Methode den optimalen Ort für die Reibung zu bestimmen. Die weitere Auswertung hat außerdem ergeben, dass alle Modelle dieses Zusatzversuchs mit beiden Reibmodellen nicht praktisch identifizierbar sind (nicht gezeigt). Insgesamt ergibt sich dadurch die Erkenntnis, dass die willkürliche Zuordnung der Reibung zu Masse eins in diesem Abschnitt keine grobe Ungenauigkeit darstellt.



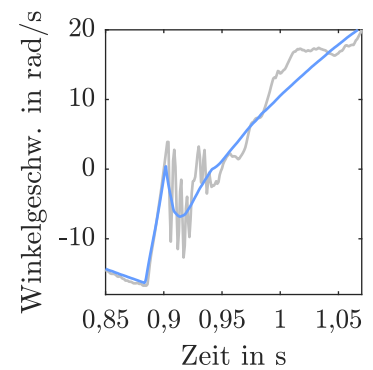
(a) Modell mit dem kleinsten Residuum an Trainingsdaten  $\equiv$  vollständiges Modell



(b) Ohne Dämpfung



(c) Ohne COULOMB'sche Reibung



(d) Ohne dritte Masse

**Abbildung 3.13:** Vergleich der Ausgangsgröße von Modell vs. Trainingsdaten für das vollständige Modell sowie Vereinfachungen davon

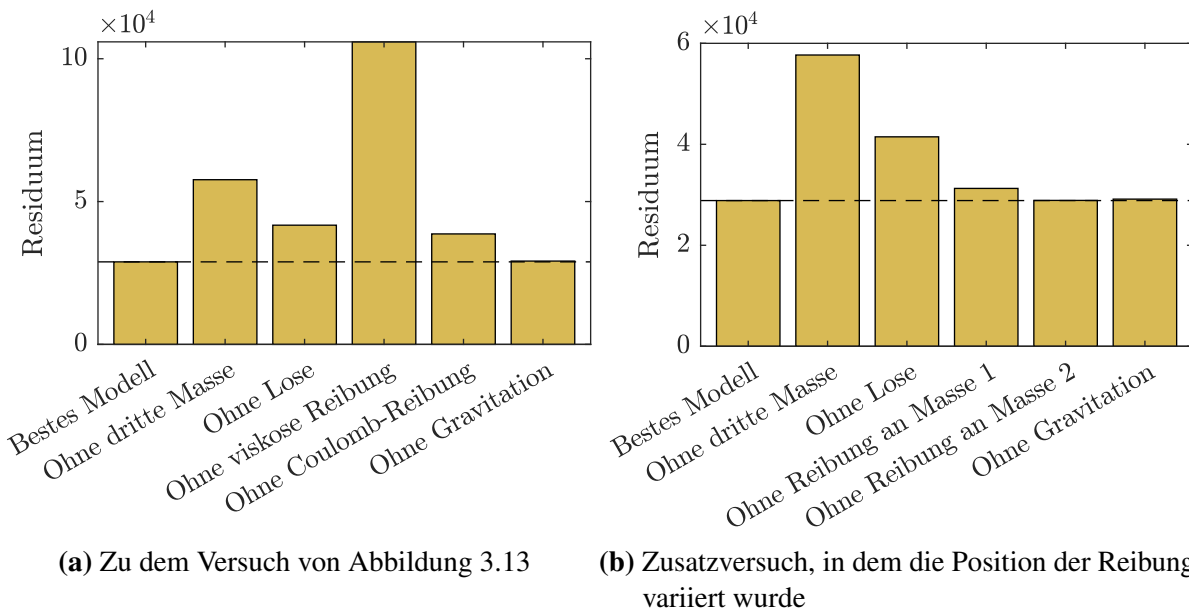
Abbildung 3.15 zeigt, wie aus Abbildung 3.6 bekannt, das reziproke Residuum an Validierungsdaten zu den verschiedenen Modellen. Die Validierungstrajektorie ist in Abbildung 3.16 gezeigt.

Wie zu erwarten steigt die Genauigkeit mit zunehmender Modellkomplexität, wobei alle Modelle ohne Reibung eine besonders schlechte Übereinstimmung aufweisen. Allerdings weist das genaueste Modell keine Gravitation auf, möglicherweise, weil der geringe Einfluss der Gravitation, siehe Abbildung 3.14(a), bei dem vollständigen Modell zu einer Überanpassung an die Trainingsdaten führt.

Mit den gewählten Schwellwerten für die praktische Identifizierbarkeit (max. skaliertes Konditionsindex  $\tilde{\eta}_{\max} = 20$ , Gleichung (3.7), max. zu min. parameter importance index  $\delta_{\max}^{\text{msqr}} / \delta_{\min}^{\text{msqr}} = 100$ , Gleichung (3.4) und Kollinearitätsindex  $\gamma = 10$ , Gleichung (3.6)) sind hauptsächlich Modelle mit sehr schlechter Übereinstimmung nicht praktisch identifizierbar.

Zuletzt soll die Genauigkeit der Parameteridentifikation überprüft werden, obwohl dies nur sehr eingeschränkt möglich ist, weil im Kontext mehrerer möglicher Modelle nicht wirklich von wahren Parameterwerten gesprochen werden kann. Tabelle 3.2 zeigt einige im Zeitbereich identifizierte





**Abbildung 3.14:** Residuum des genauesten Modells an Trainingsdaten sowie Residuen der Modelle ohne einzelne Teilmodelle

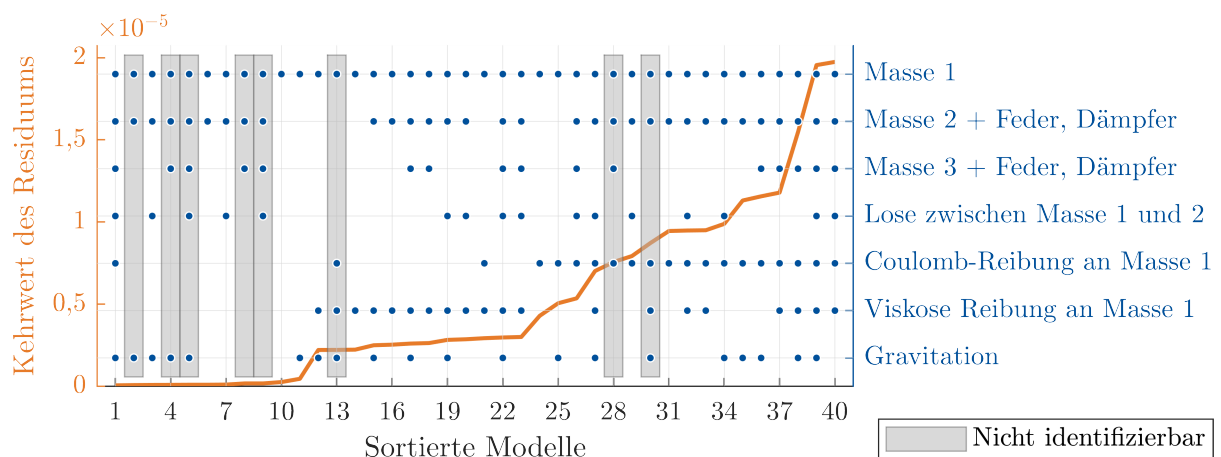
Werte des genauesten Modells gemäß Abbildung 3.15. Zum Vergleich sind die bekannten Werte aus der Frequenzbereichsidentifikation angegeben (bis auf  $\alpha_L$ ), wobei die Losekupplung dafür auf  $0^\circ$  festgesetzt wurde. Der Loseparameter  $\alpha_L$  ist von der Einstellung der Losekupplung für die Zeitbereichsidentifikation ungefähr bekannt.

Parameter	$J_1$	$J_2$	$c_2$	$d_2$	$J_3$	$c_3$	$d_3$	$2\alpha_L$
Einheit	$\text{kg m}^2$	$\text{kg m}^2$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	$\frac{\text{Nm s}}{\text{rad}}$	$\text{kg m}^2$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	$\frac{\text{Nm s}}{\text{rad}}$	$^\circ$
Identifizierter Wert	0,00138	0,00192	35,5	0,097	0,00142	4,14	0,01	8,2
Vergleichswert	0,00131	0,00169	64,8	0,0273	0,00201	4,43	0,0218	10

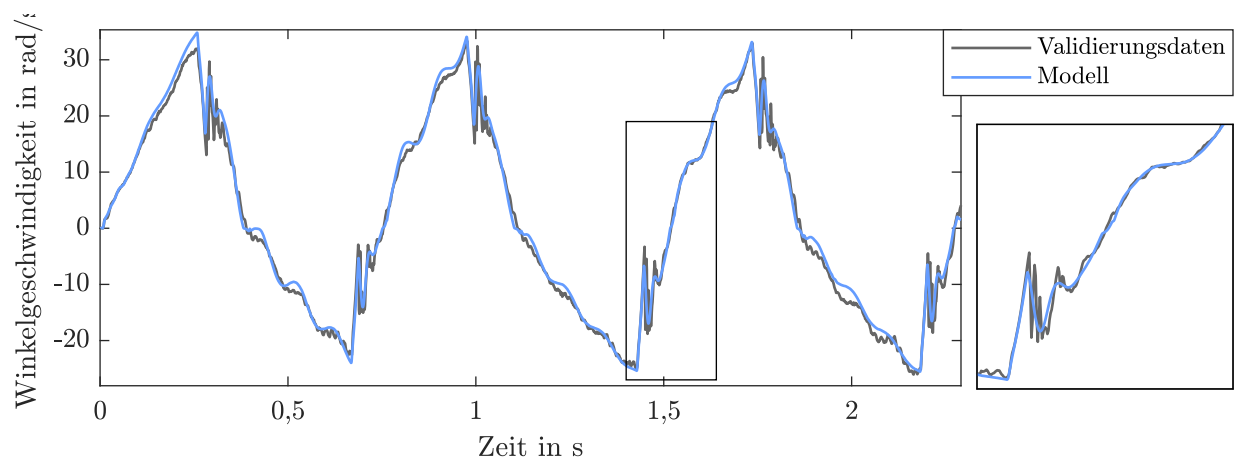
**Tabelle 3.2:** Identifizierte Werte vs. Vergleichswerte für ausgewählte Parameter aus Frequenzbereichsidentifikation (erster bis siebter) und aus Einstellung am Prüfstand (letzter)

Aus der Tabelle geht hervor, dass bei den meisten Parametern eine gute Genauigkeit erreicht wird, wobei die Werte des Dreimassenschwingers nur als grober Anhaltspunkt dienen können, weil z. B. das Massenträgheitsmoment der Losekupplung nicht eindeutig einer der Massen zugeordnet werden kann. Auch ist die tatsächliche Loseweite herstellungsbedingt etwas kleiner als der eingestellte Wert, wie die Untersuchung in [TPWOa] gezeigt hat.

Die Ergebnisse zeigen, dass auch bei Modellen mit starken Nichtlinearitäten eine Strukturidentifikation unter Berücksichtigung der Sensitivitätsmatrix möglich ist. Allerdings kann die Sensitivitätsmatrix nicht immer analytisch bestimmt werden.



**Abbildung 3.15:** Zusammensetzung der nach Genauigkeit sortierten Modelle bei der Zeitbereichsidentifikation, Prüfstand Einzelachse. Modelle, die mindestens ein Kriterium der praktischen Identifizierbarkeit nicht erfüllen, sind als „nicht identifizierbar“ gekennzeichnet.



**Abbildung 3.16:** Vergleich der Ausgangsgröße von Modell und Validierungsdaten für das Modell aus 3.13(a)

Ein Merkmal der Strukturidentifikation im Zeitbereich ist die starke Abhängigkeit des resultierenden Modells von der Anregung, hier insbesondere für Lose sichtbar. Bei Frequenzbereichsversuchen ist der Frequenzgang eine Zwischengröße, die weitgehend unabhängig von der genauen Anregung ist, solange sie geeignet ist.

Insgesamt ist die Komplexität bei den hier durchgeführten Analysen im Zeitbereich größer als bei den zuvor durchgeführten Analysen im Frequenzbereich (mehr Modellkandidaten, starke Nichtlinearitäten, Abhängigkeit von der Anregung). Trotzdem erlauben die meisten Modelle noch eine Identifikation und nur in wenigen Fällen ist die praktische Identifizierbarkeit nicht gegeben.

Eine Darstellung wie in Abbildung 3.15 gibt einen weitgehenden Überblick über das Ergebnis der Strukturoptimierung inklusive der praktischen Identifizierbarkeit. Es kann nicht nur das beste Modell abgelesen werden, sondern auch, welches andere Modell ggf. ähnlich gut ist oder noch besser in Bezug auf das Residuum aber nicht praktisch identifizierbar. Auch kann eine Aussage

über die sehr schlechten Modelle gemacht werden, nicht nur über die besten. Nachteilig ist allerdings, dass i. d. R. nicht auf den ersten Blick zu sehen ist, welches Teilmodell zu einer großen Verbesserung führt, so wie es in Abbildung 3.14 der Fall ist. Durch die Sortierung der Modelle nach ihrem Residuum werden diese Stufen in Abbildung 3.15 teilweise durch andere, weniger deutliche Effekte verdeckt.

Es ist wie in Abschnitt 3.2 schwierig, die Ergebnisse zu plausibilisieren, weil nicht von einem wahren Modell ausgegangen wird, das es zu bestimmen gilt, sondern es wird nach einem Modell gesucht, das eine nach bestimmten Kriterien angemessene Vereinfachung der Realität darstellt. Die verfolgten Ansätze zur Validierung, z. B. Vergleich der Parameter mit den Ergebnissen der Frequenzbereichsidentifikation oder einstellen einer großen Loseweite und überprüfen, ob Lose erkannt wird, stellen also einen Kompromiss dar. Zumindest konnte gezeigt werden, dass in dem betrachteten eindeutigen Fall die Lose richtig erkannt wird.

### 3.4 Nutzen von Zusatzsensorik für die Identifizierbarkeit

Da sich in den letzten Abschnitten gezeigt hat, dass manchmal ein genaues Modell verworfen werden muss, weil die praktische Identifizierbarkeit nicht gegeben ist, stellt sich die Frage, wie sich die Identifizierbarkeit verbessern lässt. Eine denkbare Maßnahme ist die Verwendung von temporärer Zusatzsensorik für die Inbetriebnahme. Beschleunigungssensoren und Drehratensensoren könnten für den Zeitraum der Inbetriebnahme kurzzeitig an markanten Stellen der Struktur angebracht werden. Durch ihr Messprinzip ohne Referenzrahmen wäre der Aufwand gering, insbesondere wenn mikro-elektromechanische Sensoren (MEMS) in Kombination mit funkbasierter Datenübertragung und Akkubetrieb verwendet würden. In diesem Abschnitt soll daher der theoretische Nutzen der Zusatzsensorik in Bezug auf die Identifizierbarkeit untersucht werden. Um eine relativ umfassende Aussage zu liefern, werden die verschiedenen Dreimassenschwingermodelle aus Abschnitt 2.3 untersucht. Die Ergebnisse wurden teilweise in der Veröffentlichung [TWOP] publiziert.

#### 3.4.1 Vorgehen zur Bewertung der strukturellen Identifizierbarkeit

Zur Quantifizierung der Identifizierbarkeit soll die strukturelle Identifizierbarkeit für verschiedene Modelle untersucht werden und zusätzlich ein sog. Grad der Identifizierbarkeit ausgewertet werden. Der Grad der Identifizierbarkeit entspricht der Auswertung der praktischen Identifizierbarkeit, wobei allerdings der numerische Wert nicht mit einem Schwellwert verglichen wird, sondern direkt als Vergleichsgröße verwendet wird.

Modelle, die durch eine ÜTF-Matrix  $\mathbf{G}(s)$  mit

$$G_{ij}(s) = \frac{b_{m,ij}s^m + \dots + b_{1,ij}s^1 + b_{0,ij}}{s^n + a_{n-1,ij}s^{n-1} + \dots + a_{1,ij}s^1 + a_{0,ij}} \quad (3.30)$$

beschrieben werden können, können durch Betrachtung der ÜTF-Koeffizienten auf strukturelle Identifizierbarkeit untersucht werden [CD80]. Die Übertragungsfunktion ist so normiert, dass der führende Koeffizient im Nenner eins ist. Die anderen Koeffizienten sind i. Allg. Funktionen der Modellparameter  $\theta$ . Wenn die Koeffizienten in eine Funktion  $\mathbf{y}_{a,b} = \mathbf{f}_{a,b}(\theta)$  geschrieben werden, ist die globale strukturelle Identifizierbarkeit äquivalent zu der Tatsache, dass eine eindeutige Lösung für  $\theta$  in Abhängigkeit von  $\mathbf{y}_{a,b}$  existiert [CD80; MXPW11]. Lokale strukturelle Identifizierbarkeit kann unter Bedingungen, die fast immer gelten, durch symbolische Rangberechnung der Matrix  $\partial \mathbf{f}_{a,b}(\theta) / \partial \theta$  geprüft werden. Sie ist genau dann gegeben, wenn diese Matrix für (fast) alle Punkte im Parameterraum vollen Spaltenrang aufweist [Vaj81]. Hier wird nur dieses Kriterium für die lokale strukturelle Identifizierbarkeit ausgewertet, weil die betrachteten Systeme für die vollständige Lösung des Gleichungssystems häufig zu komplex sind.

### 3.4.2 Grad der Identifizierbarkeit

Für einen zahlenmäßigen Vergleich verschiedener Sensorkonfigurationen wäre ein *Identifizierbarkeitsgrad*  $\xi$  hilfreich. Dazu könnten die in Abschnitt 3.1.2 angegebenen Kriterien der praktischen Identifizierbarkeit ausgewertet werden. Allerdings sind manche Kriterien durch die genaue Wahl der Normierung usw. nicht geeignet, um Konfigurationen mit unterschiedlich vielen Sensoren zu vergleichen. Die Anforderung an  $\xi$  ist, dass sich der Wert vergrößert, wenn die Anzahl der Sensoren steigt, weil dann zusätzliche Information vorliegt [Pap04].

Der tatsächliche Einfluss auf ein bestimmtes lokales Identifizierbarkeitskriterium kann auf der Basis untersucht werden, dass ein weiterer Sensor zusätzliche Zeilen in der Sensitivitätsmatrix verursacht. Beispielsweise ergeben sich die neuen PIIs bei identischer Verdopplung der Sensorsignale gemäß:

$$\left\| \left( \begin{bmatrix} \Lambda \mathbf{S}_{nl} \\ \Lambda \mathbf{S}_{nl} \end{bmatrix} \right)_j \Delta \theta_j \right\|_2 / \sqrt{2N_y} = \sqrt{2} \left\| (\Lambda \mathbf{S}_{nl})_j \Delta \theta_j \right\|_2 / \sqrt{2N_y}. \quad (3.31)$$

Der Faktor  $\sqrt{2}$  kürzt sich heraus, sodass der gleiche Ausdruck wie ohne die Verdopplung der Zeilen entsteht. Analoges gilt für die anderen in Abschnitt 3.1.2 vorgestellten Kriterien, sodass diese nicht als Identifizierbarkeitsgrad für den Vergleich unterschiedlich vieler Sensoren zu verwenden sind.

Um eine geeignete Kennzahl  $\xi$  zu finden, wird analysiert, wie sich die Eigenwerte der Matrix  $(\Lambda \mathbf{S}_{nl})^T \Lambda \mathbf{S}_{nl}$  bzw. die Singulärwerte von  $\Lambda \mathbf{S}_{nl}$  verändern, wenn ein Sensor hinzugefügt wird. Weil  $(\Lambda \mathbf{S}_{nl})^T \Lambda \mathbf{S}_{nl}$  eine symmetrisch positiv (semi-)definitive (spd) Matrix der Größe  $N_\theta \times N_\theta$  ist, führt die Hinzunahme weiterer Sensoren in der Form

$$\begin{pmatrix} \Lambda_1 \mathbf{S}_{nl1} \\ \Lambda_2 \mathbf{S}_{nl2} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Lambda_1 \mathbf{S}_{nl1} \\ \Lambda_2 \mathbf{S}_{nl2} \end{pmatrix} = (\Lambda_1 \mathbf{S}_{nl1})^T (\Lambda_1 \mathbf{S}_{nl1}) + (\Lambda_2 \mathbf{S}_{nl2})^T (\Lambda_2 \mathbf{S}_{nl2}) \quad (3.32)$$

zu einer Summe solcher Matrizen:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}. \quad (3.33)$$

Für die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{N_\theta} \quad (3.34)$$

und in analoger Weise für  $\beta_i$  und  $\gamma_i$ , die Eigenwerte von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$ , gelten folgende Beziehungen [Ful00]:

$$\gamma_{N_\theta-i-j} \geq \alpha_{N_\theta-i} + \beta_{N_\theta-j}, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{i+j-1} \leq \alpha_i + \beta_j, \quad (3.36)$$

$$\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i = \sum_i \gamma_i. \quad (3.37)$$

Daraus lassen sich Aussagen über mögliche Identifizierbarkeitsgrade auf Basis der Eigenwerte von  $(\mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{nl})^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{nl}$  ableiten. Es sei  $\xi_1$  die Identifizierbarkeit mit Sensor 1 alleine,  $\xi_2$  die mit Sensor 2 alleine und  $\xi_{ges}$  die mit beiden Sensoren zusammen:

- (3.35): Durch das Einfügen eines Sensors verringert sich niemals ein Eigenwert, sodass der größte, der kleinste und jeder andere Eigenwert als Identifizierbarkeitsgrad verwendet werden kann, mit der Eigenschaft  $\xi_{ges} \geq \xi_1, \xi_{ges} \geq \xi_2$ .
- (3.37): Die Verwendung der Spur als Kriterium ist auch möglich und führt zu der Eigenschaft  $\xi_{ges} = \xi_1 + \xi_2$  [MW72].
- (3.35): Der kleinste Eigenwert als Kriterium, also  $i = j = 0$  führt zu  $\xi_{ges} \geq \xi_1 + \xi_2$ .
- (3.36): Beim größten Eigenwert ergibt sich  $\xi_{ges} \leq \xi_1 + \xi_2$ .

Diese Gesetzmäßigkeiten sind nicht nur bei der Wahl des Kriteriums, sondern auch bei der Interpretation der Ergebnisse zu beachten, um triviale Aussagen wie „Durch den zusätzlichen Sensor verschlechtert sich der kleinste Eigenwert nicht“ zu vermeiden.

Die Identifizierbarkeit verschiedener Sensorkonfigurationen soll hier durch Betrachtung des kleinsten Eigenwertes von  $(\mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{nl})^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}_{nl}$  für den dritten Fall der Kostenfunktion, siehe Abschnitt 3.1.2, verglichen werden. Bei einer Kombination unterschiedlicher Sensoren ist es grundsätzlich erforderlich, die Messungen auch auf die Einheit des jeweiligen Sensors zu normieren. Das ist bei dieser Kostenfunktion jedoch nicht notwendig, da aus Gleichung (3.22) ersichtlich ist, dass die Sensitivität unabhängig von einer konstanten Skalierung der ÜTF ist, die sich auf  $\mathbf{G}_k$  in gleicher Weise auswirkt wie auf  $\mathbf{S}_{r,kj}$  und  $\mathbf{S}_{i,kj}$ . Aus dem gleichen Grund ist die Art des Sensors (Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung) für die Sensitivitätsberechnung unerheblich und die hier gewonnenen Ergebnisse gelten auch gleichermaßen für rotatorische und translatorische Systeme.

### 3.4.3 Ergebnisse zur strukturellen Identifizierbarkeit

Die lokale strukturelle Identifizierbarkeit wird für die elf DMS-Modelle aus Abschnitt 2.3 ausgewertet. Es geht um die Frage, welche Modelle mit dem serienmäßigen Positionssensor identifizierbar sind und sofern nicht, an welchen Stellen zusätzliche Inbetriebnahmesensoren platziert werden könnten, um das Problem zu lösen. Für die symbolischen Berechnungen werden keine Parameterwerte benötigt.

In Tabelle 3.3 sind die Ergebnisse links für den Fall gezeigt, dass die Dämpfung der Dreimassenschwinger vernachlässigt wird und rechts für den Fall, dass sie berücksichtigt wird. Wenn ein System mit dem Positionssensor allein identifizierbar ist, ist jede Kombination von zusätzlichen Sensoren ebenfalls identifizierbar und es ist keine weitere Berechnung erforderlich. Ansonsten zeigen die rechten drei Spalten mögliche Positionen für einen zusätzlichen Sensor. Bei mehreren Haken in einer Zeile markiert jeder Haken eine mögliche Lösung. Mehr als ein Zusatzsensor hat keinen Vorteil hinsichtlich der strukturellen Identifizierbarkeit für Systeme mit drei oder weniger Massen, aber bei vier Massen gibt es Sonderfälle, bei denen erst mit zwei Zusatzsensoren eine Identifizierbarkeit erreicht wird (in dieser Arbeit nicht dargestellt).

**Tabelle 3.3:** Strukturelle Identifizierbarkeit der elf DMS-Systeme nur mit Wegaufnehmer bzw. mit einem zusätzlichen Sensor, ✓: Lokal strukturell identifizierbar, ✗: Kriterium nicht erfüllt, -: Keine Überprüfung erforderlich

System	Dämpfung vernachlässigt			Dämpfung berücksichtigt				
	Nur Pos.- sensor	Zus. Sensor an			Nur Pos.- sensor	Zus. Sensor an		
		$m_1$	$m_2$	$m_3$		$m_1$	$m_2$	$m_3$
3A1*	✓	-	-	-	✓	-	-	-
3A2	✗	✓	✗	✗	✓	-	-	-
3A3	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✗
3A4*	✓	-	-	-	✓	-	-	-
3A5	✗	✓	✓	✗	✓	-	-	-
3B1*	✓	-	-	-	✓	-	-	-
3B2	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗
3C1*	✓	-	-	-	✓	-	-	-
3C2	✗	✓	✗	✗	✓	-	-	-
3C3*	✓	-	-	-	✓	-	-	-
3C4	✗	✗	✓	✗	✓	-	-	-

Im linken Bereich von Tabelle 3.3 ist zu sehen, dass im ungedämpften Fall das Kriterium für lokale strukturelle Identifizierbarkeit bei den kollokierten Systemen ohne Zusatzsensorik erfüllt ist und bei allen anderen Systemen nicht. Aus diesem Grund war zwar in den vorherigen Abschnitten die Identifikation möglich, bei anderen Modellen ist dies aber nicht immer der Fall und die Erwägung von Zusatzsensorik ist gerechtfertigt. Es ist auch zu sehen, dass in jedem Fall durch Zusatzsensoren die lokale strukturelle Identifizierbarkeit hergestellt werden kann, sodass ein deutlicher Nutzen

besteht. Da nur bestimmte Sensorpositionen das Identifizierbarkeitsproblem lösen können, sollte die Tabelle herangezogen werden, um in der Versuchsplanung sinnvolle Positionen zu wählen.

Aus dem rechten Bereich von Tabelle 3.3 geht hervor, dass durch die Dämpfung weitere Systeme lokal strukturell identifizierbar werden, was an den zusätzlichen Koeffizienten in den Zähler- und Nennerpolynomen liegt. Anhand dieser Untersuchung scheint also der Nutzen der Zusatzsensorik im gedämpften Fall kleiner zu sein.

#### 3.4.4 Ergebnisse zum Grad der Identifizierbarkeit

Die Analyse der strukturellen Identifizierbarkeit ermöglicht keinen detaillierten Vergleich von identifizierbaren Sensorkonfigurationen. Insbesondere für die Systeme mit Dämpfung sind weitere Details erforderlich, weil dort nur in zwei Fällen die Identifizierbarkeit mit Seriensenorik nicht gegeben ist. Daher wird in diesem Abschnitt der Grad der Identifizierbarkeit bewertet. Wie schon in Abschnitt 3.4.2 geschrieben, wird der kleinste Eigenwert von  $(\Lambda S_{nl})^T \Lambda S_{nl}$  ausgewertet.

Da die Ergebnisse der praktischen Identifizierbarkeit von den Modellparametern abhängen, muss eine bestimmte Parametrierung verwendet werden. In diesem Fall werden die am RBG identifizierten Parameter des Modells 3A1\* für alle Modelle verwendet, auch wenn nicht bei allen Modellen ein direkter Bezug zum Prüfstand besteht.

Die Kostenfunktion wird wie in (3.21) mit einer Gewichtung von  $\pi$  für die Amplitude und 1 für die Phase gewählt. Der Gewichtungsfaktor  $\pi$  sorgt dafür, dass 20 dB Unterschied in der Amplitude eine äquivalente Wirkung wie 180° Phasenunterschied haben. Die Sensitivitätsmatrix ist (3.22).

Es wird ein Frequenzbereich von 1,0 Hz bis 100 Hz mit 200 Frequenzen in logarithmischen Abständen gewählt. Auch hier sind die Ergebnisse mit und ohne Dämpfung in Tabelle 3.4 dargestellt.

Die Tabelle 3.4 bestätigt zunächst die Erwartung, dass der zusätzliche Sensor die Identifizierbarkeit nur verbessert, nicht verschlechtert. In vielen Fällen wird die Identifizierbarkeit deutlich verbessert, was aber stark von der Position des Zusatzsensors abhängig ist. Befindet er sich an der gleichen Stelle wie der primäre Wegaufnehmer, verdoppelt sich der Wert des kleinsten Eigenwerts, da wie oben geschrieben alle Sensorarten die gleiche Wirkung haben und dementsprechend zwei identische Matrizen für  $A$  and  $B$  in (3.33) aufsummiert werden. Aufgrund der Linearität der Eigenwerte verdoppeln sich die resultierenden Eigenwerte. Meistens befindet sich der Wegaufnehmer des kollokierten Systems an einer vergleichsweise guten Position und andere Sensorpositionen wären schlechter. Dies ist jedoch im Fall des Systems 3C3\* anders, wo ein zusätzlicher Beschleunigungsaufnehmer auf der Masse 1 wesentlich effektiver ist.

Wie bereits an Tabelle 3.3 erläutert, werden durch Dämpfung einige Systeme identifizierbar und der Nutzen der Zusatzsensorik nimmt vermeintlich ab. In Tabelle 3.4 ist jedoch zu sehen, dass in solchen Fällen die Identifizierbarkeit mit dem Positionssensor allein schlecht ist (3A2, 3A5, 3C2, 3C4). Ein Zusatzsensor erreicht hier eine deutliche Verbesserung, sodass auch im gedämpften Fall ein klarer Nutzen besteht. Bei den hier betrachteten schwach gedämpften Systemen gibt also die

**Tabelle 3.4:** Kleinster Eigenwert von  $S_{nl}^T W S_{nl}$  nur mit Wegaufnehmer bzw. mit einem zusätzlichen Sensor. In jeder Zeile ist der beste (größte) Wert fett gedruckt.

System	Dämpfung vernachlässigt			Dämpfung berücksichtigt				
	Nur Pos.- sensor	Zus. Sensor an			Nur Pos.- sensor	Zus. Sensor an		
		$m_1$	$m_2$	$m_3$		$m_1$	$m_2$	$m_3$
3A1*	71,9	143,7	145,8	<b>146,7</b>	10,9	21,7	<b>30,6</b>	25,8
3A2	0	<b>145,8</b>	0	0	0,006	<b>30,6</b>	0,013	0,010
3A3	0	<b>145,7</b>	0	0	0	<b>25,8</b>	0,010	0
3A4*	64,4	126,2	<b>128,7</b>	128,3	3,66	<b>12,6</b>	7,31	6,74
3A5	0	125,8	<b>128,3</b>	0	0,002	<b>11,4</b>	6,74	0,003
3B1*	73,2	142,1	<b>146,8</b>	146,3	11,4	<b>17,1</b>	12,3	12,5
3B2	0	0	<b>101,6</b>	0	0	0	<b>11,0</b>	0
3C1*	51,8	<b>143,2</b>	60,9	75,6	0,488	2,34	<b>5,22</b>	0,508
3C2	0	<b>132,2</b>	0	0	0,037	<b>2,59</b>	0,208	0,038
3C3*	0,86	<b>94,4</b>	4,46	0,864	0,006	<b>3,49</b>	0,028	0,007
3C4	0	0	<b>130,6</b>	0	0,037	0,208	<b>1,15</b>	0,038

strukturelle Untersuchung der ungedämpften Systeme den besten Überblick und die Aussage zur strukturellen Identifizierbarkeit mit Dämpfung ist eher nicht von praktischem Interesse.

### 3.5 Fazit

Die Modellauswahl bei elektrischen Antriebssträngen wurde im Zeitbereich und im Frequenzbereich umgesetzt. Ziel war die Optimierung der Genauigkeit bei gleichzeitiger Sicherstellung der Identifizierbarkeit des resultierenden Modells mit physikalisch interpretierbarer Struktur. Zur Überprüfung der praktischen Identifizierbarkeit dienten lokale Kriterien an der Sensitivitätsmatrix.

Die Entscheidung bzgl. der Identifizierbarkeit geschah hauptsächlich über den Vergleich von quantitativen Größen mit Schwellwerten, was zu einer starken Abhängigkeit von Hyperparametern führt. Aufgrund der Normierung können diese Schwellenwerte aber nahezu unabhängig von den Prüfstandseigenschaften auf Basis von Empfehlungen in der Literatur gewählt werden.

In Experimenten mit industrieller Hardware erwies sich die Modellauswahl als geeignet, die charakteristischen mechanischen Eigenschaften der Versuchsaufbauten aufzuzeigen, soweit dies überprüft werden kann. Eine Modellauswahl allein auf Basis der Genauigkeit an Validierungsdaten hätte zu Modellen mit unplausiblen Eigenschaften, z. B. kaum sichtbaren Resonanzen, geführt. Dies wurde erfolgreich verhindert.

Bei vielen relevanten Modellen ist die Identifizierbarkeit nicht oder in unzureichendem Maße gegeben, wenn nur Seriensensorik verwendet wird. In all diesen Fällen ist es möglich, durch zusätzliche, temporäre Zusatzsensoren die lokale strukturelle Identifizierbarkeit herzustellen sowie den Grad der Identifizierbarkeit deutlich zu verbessern. Entscheidend für den Erfolg ist allerdings



---

die richtige Positionierung der Sensoren, welche vorab durch Anwendung der beschriebenen Methode überprüft werden kann.

Insbesondere wenn die Dämpfung vernachlässigt wird, ist die Identifizierbarkeit des Modells oft nicht gegeben. Wird die Dämpfung berücksichtigt, ist die strukturelle Identifizierbarkeit häufiger gegeben, aber in diesen Fällen ist der Grad der Identifizierbarkeit schlecht und kann durch geeignet positionierte Zusatzsensoren verbessert werden.



## 4 Unterscheidbarkeit von Strukturen

Es stellt sich die Frage, ob die Modellkandidaten anhand des gemessenen Ein-/Ausgangsverhaltens unterschieden werden können. Da die Parameter der Modelle im Vorfeld nicht bekannt sind, wäre es denkbar, dass sich zwei Modelle für bestimmte Parametersätze exakt gleich verhalten, obwohl sie sich in der Struktur unterscheiden. In der Konsequenz würde ein Modell als das Ergebnis ausgegeben, obwohl ein anderes Modell die gleiche Güte aufweist. Um bei der Festlegung einer Menge von Modellkandidaten solchen Mehrdeutigkeiten vorzubeugen, ist es nötig, die Unterscheidbarkeit vorab zu untersuchen.

In diesem Kapitel werden zunächst in Abschnitt 4.1 Argumente für die Wichtigkeit der Unterscheidbarkeit gesammelt. Abschnitt 4.2 führt relevante Grundlagen ein, bevor dann in den Abschnitten 4.3 und 4.4 zwei Methoden zur Unterscheidbarkeitsanalyse im Detail vorgestellt und auf die gegebenen Systeme angewandt werden. Da häufig die Eindeutigkeit nicht gegeben ist, behandelt Abschnitt 4.5 die Frage, ob mit Zusatzsensorik solche Probleme gelöst werden können. Ein

### 4.1 Beispiele für die Wichtigkeit der Unterscheidbarkeit

In vielen Anwendungen ist die genaue Modellstruktur unerheblich, solange das Ein-Ausgangsverhalten übereinstimmt. Dies ist das Prinzip der *Äquifinalität* [RFD08]. Durch das Ziel, physikalisch interpretierbare Modelle zu generieren, ergibt sich aber eine Forderung nach Eindeutigkeit bei der Modellauswahl. Existierende Mehrdeutigkeiten sollten zumindest bekannt sein. Ansonsten wäre eine anschließende Interpretation auf unsichere Informationen gestützt. In diesem Abschnitt werden Beispiele genannt, die die praktische Bedeutung des Mehrdeutigkeitsproblems zeigen.

Zunächst ist es bei der Durchführung der Identifikation aller Modelle hauptsächlich für die Rechenzeit wichtig, dass nicht unnötig viele Modelle identifiziert und weiter untersucht werden. Deshalb ist es erstrebenswert, schon vorab ununterscheidbare Modelle zu erkennen und existierende Doppelungen auszuschließen.

Aus der Literatur ist bekannt, dass mangelnde Unterscheidbarkeit ein Problem für die Zustandsüberwachung darstellt, die den Zustand eines Systems durch den Vergleich mit mehreren Modellen (kein Fehler, Fehler 1, Fehler 2, ...) bestimmt [MPC+13]. Ein falsches Modell würde zu Fehldiagnosen und ungeeigneten Maßnahmen führen, wie unnötige Unterbrechungen der Produktion, den Tausch fehlerfreier Komponenten usw.

In [DDH05] wird gezeigt, dass die Unterscheidung von Kontaktfällen eines Roboters mit seiner Umwelt wichtig ist für die Einleitung der geeigneten Reaktion. Eine Fehlerkennung des Kontaktmodells könnte zu einer Zerstörung der Mechanik führen.

Bei sog. *Kompartimentmodellen* zur Untersuchung der Verteilung von Medikamenten im Körper sind Unterscheidbarkeit und Identifizierbarkeit laut [YJWC09] wichtig, weil die Zustände den Konzentrationen der Medikamente in einzelnen Organen zugeordnet sind und somit eine physikalische Bedeutung aufweisen. Es besteht also nicht nur Interesse am Ein-/Ausgangsverhalten, sondern auch an den inneren Zuständen, die sich in Abhängigkeit vom Modell stark unterscheiden können.

Laut [GC89] ist generell dann die Ununterscheidbarkeit ein Problem, wenn sich bei einer anderen Anregung als der zur Modellauswahl verwendeten Unterschiede zwischen den Modellen zeigen. Die Vorhersagegenauigkeit kann dann unerwartet schlecht sein. Obwohl also bei der gewählten Anregung zur Identifikation kein Unterschied zu erkennen ist, ist der existierende Unterschied doch wichtig.

Im Folgenden soll als ein weiteres Beispiel gezeigt werden, dass für die Anwendung der Vorsteuerung das richtige Modell von Interesse sein kann, auch wenn sich das Ein-/Ausgangsverhalten nicht unterscheidet.

Dazu wird für das Modell 2A1\* (Tabelle 2.2) eine sog. *flachheitsbasierte Vorsteuerung* entworfen. Es wird davon ausgegangen, dass sich parallel zu der Feder ein Dämpfer mit der Ersatzdämpfungskonstanten  $d_{12}$  befindet. Für Details zur flachheitsbasierte Vorsteuerung sei auf [FLMR93; Ada14] verwiesen. Grundsätzlich erfordert die Theorie, dass für ein System ein sog. *flacher Ausgang*  $\mathbf{y}_f$  gefunden werden kann, der dadurch gekennzeichnet ist, dass sich die Systemzustände und Eingänge folgendermaßen darstellen lassen:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}_{\phi 0}(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{N_z-1}), \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}_{\phi 1}(\mathbf{y}_f, \dot{\mathbf{y}}_f, \dots, \mathbf{y}_f^{N_z}). \quad (4.2)$$

Für den flachen Ausgang wird eine hinreichend oft stetig differenzierbare Trajektorie vorgegeben, für die mithilfe von (4.2) das vorzusteuernde Eingangssignal berechnet wird, welches zum genauen Verfolgen dieser Trajektorie führt. Um einen geeigneten flachen Ausgang und geeignete Zustände zu finden, ist z. B. bei vollständig steuerbaren Systemen die regelungstechnische Normalform der Zustandsraumdarstellung aufzustellen [Lev09], wie in [Lun20] beschrieben. Deren erster Zustand oder ein Vielfaches davon ist ein geeigneter flacher Ausgang.

Bei dem System 2A1\* ist die lastseitige Position ein flacher Ausgang, wenn  $d_{12}$  vereinfachend auf null gesetzt wird<sup>1</sup> [Lev09; BSDO15]. Dieser Fall ist besonders relevant, weil die Last direkt mit anderen Komponenten interagiert und somit die Lastbewegung wichtiger ist als die Motorbewegung.

<sup>1</sup>Bei vielen Strukturen aus Metall ist materialbedingt die Dämpfung gering und diese Vereinfachung zulässig [Zir08].

Damit die Masse  $m_2$  der Trajektorie  $(q_{2,s}(t), \dot{q}_{2,s}(t), \ddot{q}_{2,s}(t), \dots)$  folgt, muss die Motorkraft  $F_M(t)$  folgendermaßen vorgesteuert werden ( $d_{12} = 0$ ):

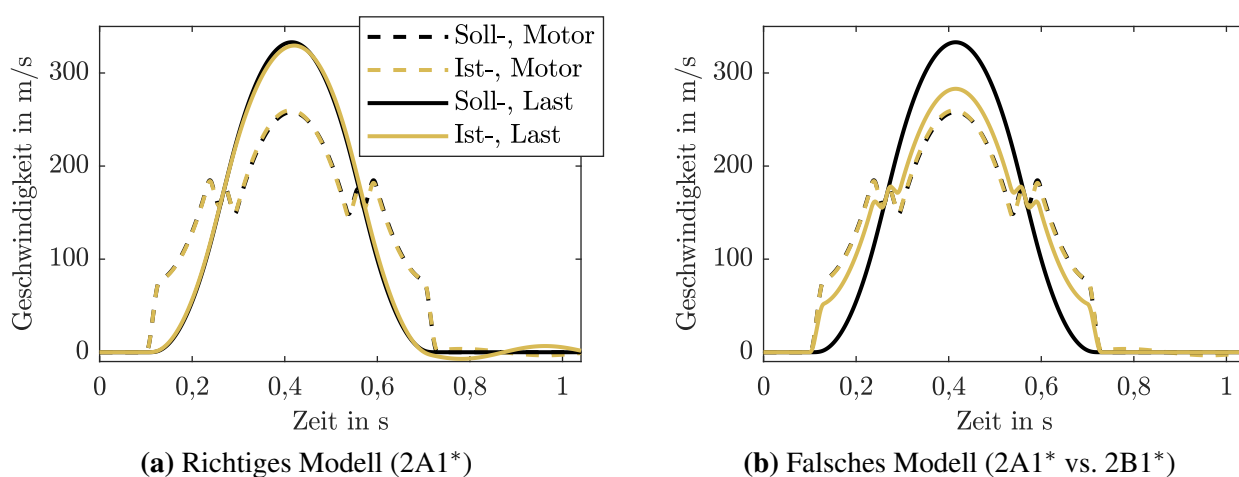
$$F_M(t) = m_1 \ddot{q}_{1,s}(t) + m_2 \ddot{q}_{2,s}(t). \quad (4.3)$$

Aus (4.1) ergibt sich die zugehörige motorseitige Position  $q_{1,s}(t)$ , die auch als Referenztrajektorie für den Positionsregler benötigt wird [BSDO15]:

$$q_{1,s}(t) = q_{2,s}(t) + \frac{m_2}{c_{12}} \ddot{q}_{2,s}(t). \quad (4.4)$$

In Simulation wird der gemäß (4.3) berechnete Momentenverlauf als Vorsteuerung für ein Simulationsmodell 2A1\* mit Dämpfung verwendet, während der Regler ausgeschaltet ist. Die Vorsteuerung entspricht einem Ortswechsel von Stillstand zu Stillstand mit vier mal stetig differenzierbarem Positionssignal. Die Modellparameter sind  $m_1 = 0,04 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,02 \text{ kg}$ ,  $c_{12} = 4 \text{ N/m}$  und  $d_{12} = 0,01 \text{ Ns/m}$ .

In Abbildung 4.1(a) ist der Geschwindigkeitsverlauf für den Ortswechsel dargestellt. Es ist zu sehen, dass die Lastmasse dem gewünschten Verlauf folgt, wobei leichte Abweichungen durch die Dämpfung zustande kommen. Die Geschwindigkeit des Motors zeigt wie erwartet einen komplexeren Verlauf und folgt ebenfalls der Vorgabe.



**Abbildung 4.1:** Geschwindigkeitsverlauf für Motor- und Lastmassenposition bei flachheitsbasierter Vorsteuerung entworfen für das Modell 2A1\*. Angewendet wird die flachheitsbasierte Vorsteuerung links auf das Modell 2A1\* und rechts auf das Modell 2B1\*.

Zusätzlich wird ein Simulationsmodell vom Typ 2B1\* (Parameter  $\hat{m}_1, \hat{m}_2, \hat{c}_1, \hat{d}_1$ ) so parametriert, dass es das gleiche Ein-/Ausgangsverhalten zeigt, wie das Modell 2A1\*:

$$\begin{aligned}\hat{m}_1 &= m_1(m_1 + m_2)/m_2, \\ \hat{m}_2 &= m_1 + m_2, \\ \hat{c}_1 &= c_{12}(m_1 + m_2)^2/m_2^2, \\ \hat{d}_1 &= d_{12}(m_1 + m_2)^2/m_2^2.\end{aligned}\tag{4.5}$$

In Abbildung 4.1(b) sind die Geschwindigkeitsverläufe für den Fall dargestellt, dass die wie bisher berechnete Vorsteuerung auf das Simulationsmodell 2B1\* angewandt wird. Es ist zu sehen, dass die Motorgeschwindigkeit immer noch ähnlich genau dem Sollverlauf folgt, während die Lastposition in diesem Fall nicht dem gewünschten Verlauf gleicht, sondern sich eher dem Verlauf der Motorposition annähert.

Die Simulation zeigt, dass das Ein-/Ausgangsverhalten (von Motormoment zu Motorposition) für beide Modelle gleich ist, erkennbar an der Übereinstimmung der gestrichelten Linien in Abbildung 4.1(a) und 4.1(b). Jedoch führt der Unterschied in der Struktur zu einem anderen Verhalten der Zielgröße (Lastposition, -geschwindigkeit usw.). Das heißt, weil in diesem Fall nicht nur das Ein-/Ausgangsverhalten von Bedeutung ist, sondern eine nicht gemessene Größe, führt die nicht gegebene Unterscheidbarkeit zu einem falschen Verlauf der Zielgröße.

Insgesamt ist festzuhalten, dass nicht nur die abstrakte Forderung nach physikalisch interpretierten Modellen die Untersuchung der Unterscheidbarkeit motiviert, sondern auch praktische Gründe der weiteren Verwendung dafür sprechen. Es besteht manchmal sogar Interesse an der richtigen Modellstruktur, wenn diese keine Auswirkung auf die Messungen der Identifikationsversuche hat oder sogar das Ein-/Ausgangsverhalten der potentiellen Modelle gleich ist. In Abschnitt 4.5 wird daher der Frage nachgegangen, ob sich in solchen Fällen durch Zusatzsensorik doch eine Entscheidung herbeiführen lässt.

## 4.2 Definitionen und Methoden

Es folgt eine Literaturübersicht zu dem Thema der Unterscheidbarkeit, wobei in Abschnitt 4.2.1 die genauen Definitionen erläutert werden und in Abschnitt 4.2.2 die Untersuchungsmethoden.

### 4.2.1 Definition der Unterscheidbarkeit dynamischer Modelle

Unterscheidbarkeit kann in verschiedenen Zusammenhängen untersucht werden, doch hier soll ausschließlich der Fall von parametrisierten, dynamischen Systemen  $M_1(\theta_1)$  und  $M_2(\theta_2)$  betrachtet werden. Die Vektoren  $\theta_1 \in \Omega_1$  und  $\theta_2 \in \Omega_2$  sind die zugehörigen zu identifizierenden Parametersätze, die durch Vorwissen auf den Bereich  $\Omega_1$  bzw.  $\Omega_2$  beschränkt sind. Zum Beispiel können

physikalische Parameter häufig nur positive Werte annehmen. Beide Modelle haben die gleiche Anzahl von Eingängen und Ausgängen.

In Analogie zur strukturellen Identifizierbarkeit kann *strukturelle Ununterscheidbarkeit* definiert werden: Zwei Modelle gelten als *strukturell ununterscheidbar* oder *äquivalent*, wenn es möglich ist für (fast) jedes  $\theta_1 \in \Omega_1$  ein  $\theta_2 \in \Omega_2$  so zu finden, sodass  $M_1(\theta_1)$  und  $M_2(\theta_2)$  das gleiche Ein-/Ausgangsverhalten aufweisen und umgekehrt (Indices 1 und 2 vertauscht) [Vaj81]. Die Einschränkung „fast“ bedeutet, dass es wenn überhaupt nur für einige spezielle Parametrierungen auf Hyperflächen im Parameterraum Ausnahmen geben darf, z.B. Teilen durch null, symmetrische Parametrierungen oder Pol-Nullstellen-Kompensation (PNK) [AK00].

Streng genommen ist diese Eigenschaft schwer zu testen und selten erfüllt, weil die Grenzen der Parameterräume gezielt aufeinander abgestimmt sein müssten, sodass sie in beiden Systemen gleichzeitig erreicht werden<sup>2</sup>. In [RLWV85] wird daher Unterscheidbarkeit als eine gerichtete Eigenschaft betrachtet und es wird zwischen dem Daten generierenden Modell (*generating model*) und dem sich anpassenden Modell (*to be built*) unterschieden [AK00; WLH84]. So muss der Parameterraum des sich anpassenden Modells nur groß genug sein, damit Ununterscheidbarkeit in eine Richtung gilt.

Noch weniger restriktiv und praktisch relevanter ist die Eigenschaft der *lokalen Äquivalenz* oder *lokalen Ununterscheidbarkeit* an einem gegebenen Punktepaar  $(\theta_{1,0}, \theta_{2,0})$ ,  $\theta_{1,0} \in \Omega_1$ ,  $\theta_{2,0} \in \Omega_2$ , bei der nur gefordert wird, dass es in beiden Parameterräumen eine offene Nachbarschaft um den gegebenen Punkt gibt, in der die Eigenschaft der Äquivalenz gilt [Vaj81].

Ähnlich ist das Konzept der *regionalen Unterscheidbarkeit*. Es ist vergleichbar mit der strukturellen Unterscheidbarkeit, außer dass eine Beschränkung auf einen offenen Bereich im Parameterraum zugelassen wird. Teilweise ist es möglich, die Bereiche explizit anzugeben [CG89].

In dieser Arbeit wird der Begriff unterscheidbar als das Gegenteil von ununterscheidbar verwendet, obwohl es durchaus differenziertere Definitionen gibt [AK00]. Der Grund ist die geringe Praxisrelevanz einer weiteren Einteilung.

Ähnlich wie bei der Identifizierbarkeit können auch bei der Unterscheidbarkeit die Anfangszustände mit berücksichtigt werden. Wenn die Anfangszustände nicht bekannt sind, stellt sich die Frage, ob sie Werte annehmen können, sodass das transiente Verhalten übereinstimmt [Vaj81; RS; GVČ+17]. Im Sinne der Einfachheit und wegen der geringen Praxisrelevanz werden die Anfangszustände häufig nicht berücksichtigt. Bei linearen Systemen können sie auf null gesetzt werden oder es wird der eingeschwungene Zustand betrachtet.

<sup>2</sup>Diese Definition ist beispielsweise dann relevant, wenn der Parameterraum unbegrenzt ist oder wenn er auf positive Zahlen begrenzt ist.

### 4.2.2 Methoden zur Untersuchung der strukturellen Unterscheidbarkeit

Nach der kurzen Einordnung verschiedener Definitionen soll nun auf Methoden zur Untersuchung der Unterscheidbarkeit eingegangen werden. Grundsätzlich wird versucht, Gleichungssysteme symbolisch zu lösen und wenn Lösungen existieren, die zulässigen Parameterbereiche zu überprüfen. Der Nachweis der (Un-)Unterscheidbarkeit ist eng mit der Identifizierbarkeit verwandt. Der Unterschied besteht darin, dass bei der Identifizierbarkeit die Eindeutigkeit einer Lösung geprüft wird, während bei der Unterscheidbarkeit die Existenz von Lösungen von Interesse ist [GCV94]. Die Gleichungssysteme haben die allgemeine Form  $\Phi_1(\theta_1) = \Phi_2(\theta_2)$ , wobei  $\Phi_1(\theta_1)$  und  $\Phi_2(\theta_2)$  nach [Vaj81; CG89] als *Strukturinvarianten* (SI), oder auch engl. „exhaustive summary“ [Jan16] bezeichnet werden.

Die Methoden zur Aufstellung der Gleichungssysteme sollen kurz aufgezählt werden, begonnen mit nichtlinearen Systemen: Beim *Zeit-Potenzreihen-* oder *Taylorreihen-Ansatz* [Poh78] werden für beide Modelle mehrere zeitliche Ableitungen der Ausgangsgröße gebildet und die resultierenden Ausdrücke für  $t = 0$  gleichgesetzt. Die Idee ist, dass der Verlauf der meisten Zeitfunktionen nach der Theorie der Taylorreihe durch unendlich viele zeitliche Ableitungen an der Stelle  $t = 0$  definiert ist [BÅ70; Poh78]. In vielen Fällen wiederholen sich die Ableitungen nach einem Muster, z. B.  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$  oder sie werden null, sodass nur wenige Ableitungen wirklich berechnet werden müssen. Auch kann abgebrochen werden, wenn schon nach wenigen Ableitungen ein Widerspruch entsteht. Weil die Ausdrücke von den Anfangszuständen abhängen, wird diese Methode häufig verwendet, wenn Interesse an äquivalenten Anfangszuständen besteht oder die Anfangszustände beider Systeme bekannt sind [HPC+11].

Ähnlich funktioniert der *Generatorreihen-Ansatz*, engl. *generating series*, wobei dort nicht nur mehrfach nach der Zeit abgeleitet wird, sondern zusätzlich auch nach den Eingängen [RLWV85; WP96]. Auch hier ist nicht vorab bekannt, welche Ableitungen sinnvoll sind und wie viele Gleichungen generiert werden müssen. Es reichen aber meistens weniger Gleichungen aus als beim Taylorreihen-Ansatz [RLWV85].

Beim *Ansatz der lokalen Zustandsisomorphismen* wird ausgehend von der nichtlinearen Zustandsraumdarstellung versucht, eine Abbildungsfunktion zwischen beiden Modellen für die Parameter und für die Zustände zu finden. Beide Funktionen können nichtlinear sein. Das Gleichungssystem dieser Methode enthält zusätzlich zu algebraischen Gleichungen auch Differenzialgleichungen [GCV94; ECCG04]. Die Anwendbarkeit der Methode setzt Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit voraus [CGV94].

Schließlich gibt es für nichtlineare Modelle die *Methode der differentiellen Algebra*, bei der die Zustände aus den Modellgleichungen durch differentielle Algebra eliminiert werden, sodass nur Ausdrücke mit den Eingängen, Ausgängen und deren Ableitungen stehenbleiben. Die Koeffizienten in diesen Gleichungen werden dann auf Übereinstimmung überprüft [MRS18].



Bei linearen Systemen vereinfacht sich die Methode der differentiellen Algebra zum *Laplace-Transformations-Ansatz* (LTA), bei dem die Übertragungsfunktionen der Modelle berechnet und die Koeffizienten (genannt *moment invariants*) verglichen werden. Einer der Koeffizienten ist zu normieren, z. B. auf eins und gemeinsame Pol- und Nullstellen sind zu kürzen. Bei dieser Methode wird nur die Gleichheit im eingeschwungenen Zustand geprüft. Sollen auch die Anfangszustände der Zustandsraumdarstellung (Abbildung 2.4) berücksichtigt werden, muss die Laplace-Transformierte der Ausgangsgröße

$$\mathbf{Y}(s, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{C}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}})(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^{-1}\mathbf{x}_0 + \left[ \mathbf{C}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}})(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}}))^{-1}\mathbf{B}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + \mathbf{D}_Z(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right] \mathbf{U}(s). \quad (4.6)$$

betrachtet werden [VR88]. Je nach Anwendung sind die Anfangszustände entweder bekannt oder es werden äquivalente Anfangszustände zusammen mit den Parametern bestimmt [VR88; ZCK91].

Die lineare Entsprechung zum Taylorreihenansatz ist der *Markov-Parameter-Ansatz* (MPA). Dabei wird die komplexe Potenzreihen-Entwicklung der ÜTF mit unendlicher Länge [Vaj81; DSNR92]

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 s^{-1} + \mathbf{G}_2 s^{-2} + \dots \quad (4.7)$$

betrachtet. Es besteht folgender Zusammenhang zu der Sprungantwort  $\mathbf{h}(t)$  bzw. Impulsantwort  $\mathbf{g}(t)$ , beides für das energiefreie System [HPF99; DSNR92]:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{h}(t)|_{t=0^+}, \quad \mathbf{G}_i = \left. \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} \mathbf{g}(t) \right|_{t=0^+}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

und die Berechnung aus der linearen Zustandsraumdarstellung erfolgt gemäß [HPF99; DSNR92]:

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{D}_Z, \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z^{i-1} \mathbf{B}_Z, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.9)$$

$\{\mathbf{G}_i\}, i = 1, 2, \dots$  werden Markov-Parameter genannt, wobei auch  $\mathbf{G}_0$  für die Analyse benötigt wird.

Obwohl die Reihe der Markov-Parameter unendlich ist, genügt es, nur die ersten  $N_{Z1} + N_{Z2}$  Markov-Parameter und die Terme  $\mathbf{D}_{Z1}, \mathbf{D}_{Z2}$  zu betrachten, ohne dass dadurch ein Informationsverlust entsteht ( $N_{Z1}, N_{Z2}$  ist die Anzahl der Zustände von  $M_1$  bzw.  $M_2$  und  $\mathbf{D}_{Z1}, \mathbf{D}_{Z2}$  sind die Durchgangsanteile). Dies kann mit dem Cayley-Hamilton Theorem [MPCD15] gezeigt werden. Wenn die Anfangszustände nicht  $\mathbf{0}$  und nicht bekannt sind, müssen wie im nichtlinearen Fall zusätzlich zu den Parametern äquivalente Anfangszustände gefunden werden [MPC+13].

Schließlich gibt es den *Ähnlichkeitstransformations-Ansatz*. Bei linearen Systemen kann die Abbildung der Zustände immer als Matrixmultiplikation geschrieben werden, sodass nicht nach einer beliebigen Funktion gesucht wird, sondern nur nach den Einträgen in der Transformationsmatrix. Es ergibt sich ein Gleichungssystem mit besonders vielen Unbekannten aber auch besonders vielen Gleichungen, die zudem eher einfach sind. Außerdem wurde eine Methode definiert, um nur die

Lösbarkeit zu untersuchen und nicht die Transformationsmatrix explizit aufzustellen, sodass nur die Systemparameter als Unbekannte zu berücksichtigen sind [AK00]. Äquivalente Anfangszustände können beim Ähnlichkeitstransformations-Ansatz immer gefunden werden, weil sie durch die Transformationsmatrix direkt gegeben sind [MPC+13].

Manchmal ist die Suche nach Lösungen in symbolischen Ausdrücken zu komplex oder es existiert keine explizite Lösung. Für letzteres ist die Lösung von  $\sin(x) + x = 1$  nach  $x$  ein Beispiel. Deshalb wurden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ununterscheidbarkeit formuliert, die in vielen Fällen schon eine Aussage zulassen, ohne dass die explizite Lösung bekannt wäre [GC89; ZCK91; DGA+17]. Die Kriterien werden in Abschnitt 4.4.1 genauer erklärt und angewendet. Manchmal greift keines dieser Kriterien und die Frage kann nicht beantwortet werden.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die Terminologie und Methodik zu dem Thema der Unterscheidbarkeit schon weit entwickelt ist, dass diese Fragestellung bisher aber viel seltener untersucht wurde als Identifizierbarkeit, Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit. Praktische Anwendungen waren meist auf biomedizinische Modellierung und Reaktionskinetik [ECCG04] beschränkt. Auch die Methodik zur Untersuchung der Gleichungen auf die Existenz von Lösungen hin bietet Potential für weitere Arbeiten, denn es ist nicht in jedem Fall möglich, eine Antwort zu finden.

Im Gegensatz zur Identifizierbarkeit wird bei linearen Systemen fast immer von dem LTA oder vom Ähnlichkeitstransformations-Ansatz Gebrauch gemacht [RLWV85; GC89; SD92; MRS18], hauptsächlich LTA [ZCK91; DGA+17]. Nur in wenigen Veröffentlichungen wurden bisher die Markov-Parameter verwendet [MPC17] und es fehlen vergleichende Arbeiten.

Im Folgenden wird die Unterscheidbarkeitsfrage für ÜTF-Modelle untersucht, die den Antriebstrang beschreiben. Besonders interessant ist die Frage der Unterscheidbarkeit der in Abschnitt 2.3 eingeführten Menge von Modellen. Im Abschnitt 4.3 wird die Reihenfolge der Resonanzen und Antiresonanzen im Frequenzgang der Mehrmassenschwinger als Unterscheidungsmerkmal untersucht, weil sie ein auffälliges Merkmal schwach gedämpfter Systeme sind. In Abschnitt 4.4 werden die Koeffizienten der Übertragungsfunktion und die Markov-Parameter als alternative Ansätze ausgewertet.

### 4.3 Unterscheidung anhand der Resonanzen und Antiresonanzen im Frequenzgang

Die Unterscheidbarkeitsuntersuchungen dieser Arbeit beschränken sich auf Modelle, die als lineare Zustandsraumdarstellung geschrieben werden können, weil bei nichtlinearen Modellen häufig aus dem charakteristischen Funktionsverlauf gefolgert werden kann, ob es sich bei der Nichtlinearität um z. B. Reibung oder Lose handelt und sich das Problem gar nicht erst stellt. Insgesamt sind laut [VR94] nichtlineare Modelle tendenziell in mehr Fällen unterscheidbar als lineare Modelle. Außerdem sind die Methoden für nichtlineare Systeme, wie im vorherigen Abschnitt vorgestellt,

schwer vollständig zu automatisieren und es muss vielmehr von Fall zu Fall eine Möglichkeit gefunden werden.

In diesem Abschnitt soll basierend auf der Veröffentlichung [THPW21] der Frage nachgegangen werden, ob die Mehrmassenschwinger-Modelle anhand der Anordnung von Resonanzen und Antiresonanzen im wenig gedämpften oder ungedämpften Frequenzgang unterscheidbar sind. Aus maschinendynamischer Sicht bietet sich diese Vorgehensweise an, denn die ÜTFen von Mehrmassenschwingern zeigen eine charakteristische Abfolge von Resonanzen und Antiresonanzen. Wenn sich hieraus bei unbekanntem Modellparametern das korrekte Modell eindeutig ergibt, ist eine visuelle Zuordnung zwischen Modell und gemessenem Frequenzgang möglich. Im Fall von Mehrdeutigkeiten könnte ggf. trotzdem eine gewisse Eingrenzung auf wenige Modelle erfolgen.

Es ist denkbar, dass bei speziellen Parametrierungen Extremstellen (Pol- und Nullstellen) zusammenfallen und sich dadurch der Verlauf grundlegend ändert. Diese Spezialfälle werden nicht wie sonst bei strukturellen Untersuchungen üblich vernachlässigt, sondern explizit durch Fallunterscheidungen aufgezeigt. Außerdem wird berücksichtigt, dass die physikalischen Parameter positiv sein müssen. Insgesamt beschreibt keine der oben angegebenen Definitionen die untersuchte Fragestellung exakt.

#### 4.3.1 Mögliche Formen von Pol- und Nullstellen

Eine notwendige Bedingung für die Ununterscheidbarkeit ist, dass die Modelle das gleiche *Muster von Polen und Nullstellen* im Frequenzgang für zulässige physikalische Parameter  $\theta \in \mathbb{R}^+ < \infty$  aufweisen können. Mit Muster ist die Frequenz und die Lage in der komplexen Ebene gemeint, auf die in diesem Abschnitt eingegangen wird. Da sich die Lage der Pol- und Nullstellen besonders gut für den ungedämpften Fall visuell bestimmen lässt (also Dämpfungskonstanten  $d_i = 0$ ), und mechanische Systeme häufig nur schwach gedämpft sind, siehe oben, wird die Dämpfung in der Rechnung nicht explizit berücksichtigt. Der Einfluss von geringfügiger Dämpfung ergibt sich anschließend durch Zusatzüberlegungen, wie beispielsweise die Überlegung ob die Phase bei einer Resonanz um  $180^\circ$  steigt oder fällt.

Ohne Dämpfung treten in der ÜTF von Kraft zu Position oder auch Kraft zu Beschleunigung nur gerade Exponenten von  $s$  auf:

$$G(s) = \frac{b_{2m}s^{2m} + \dots + b_2s^2 + b_0}{a_{2n}s^{2n} + \dots + a_2s^2 + a_0}, n, m \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Es ist zweckmäßig,  $\Omega = -s^2$  zu ersetzen und die Lage der Wurzeln<sup>3</sup> in  $\Omega$  statt in  $s$  zu diskutieren, weil für den häufigsten Fall von rein imaginären, komplex konjugierten Wurzeln in  $s$  die Entsprechung in  $\Omega$  eine positive, reelle Zahl ist.

<sup>3</sup>Der Begriff „Wurzel“ wird hier als Synonym für Nullstelle in Zähler- oder Nennerpolynom verwendet. Der Begriff „Nullstelle“ könnte fälschlich als Aussage über den Zähler verstanden werden.

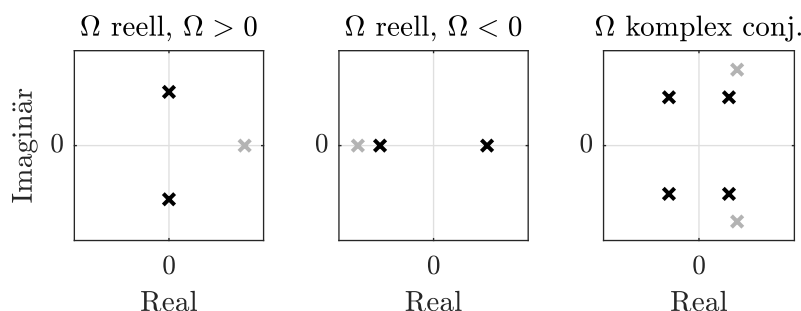
In Abb. 4.2 sind die drei möglichen Orte der Wurzeln in der komplexen Ebene dargestellt. Da die Koeffizienten reell sind, sind die Wurzeln in  $\Omega$  entweder reell (linke und mittlere Abbildung) oder komplex konjugiert (rechte Abbildung). Bei reellen Wurzeln in  $\Omega$  muss weiter zwischen positiven und negativen Werten unterschieden werden. Im ersteren Fall sind die Wurzeln in  $s$  komplex konjugiert, rein imaginär (linke Abbildung) und verschieben sich bei Dämpfung leicht in die linke  $s$ -Halbebene (HE). Sie erscheinen als (Anti-)Resonanzen im Frequenzgang und verursachen dort einen Phasensprung von  $180^\circ$ .

Im zweiten Fall (mittlere Abbildung) tritt eine nichtminimalphasige Wurzel (nm) in  $s$  auf und die Phase des Frequenzgangs bleibt bei dieser Frequenz unverändert. Dieser Fall wird auch u. a. in [CVK02; Jan10] beschrieben. Es zeigen sich keine Resonanzen oder Antiresonanzen im Frequenzgang, was ein Problem für das beschriebene Vorgehen darstellt, weil offensichtlich der Frequenzgang nicht immer allein durch Resonanzen und Antiresonanzen beschreibbar ist.

Dieses Problem ergibt sich auch für den rechten Fall, wo ein konjugiert komplexes Wurzelpaar in  $\Omega$  zu vier Wurzeln in  $s$  mit achsensymmetrischer Anordnung korrespondiert. In diesem speziellen Fall sind die Wurzeln in  $s$  gedämpft (LEHR'sches Dämpfungsmaß ungleich null), obwohl die Dämpfungskonstanten  $d_i$  null sind. Es wird sich im Folgenden zeigen, wie häufig nichtminimalphasige Wurzeln vorkommen.

Zusätzliche Pole oder Nullstellen im Ursprung bestimmen die Steigung des Frequenzgangs und müssen ebenfalls übereinstimmen. Dies ist aber durch die Verwendung des richtigen Sensors (Position, Geschwindigkeit, ...) praktisch immer gegeben.

In den folgenden Abschnitten wird das Muster der Pole und Nullstellen für alle elf Dreimassensysteme aus Abschnitt 2.3, Tabelle 2.3 untersucht. Sie sind als repräsentativer Satz an Mehrmassenschwingern anzusehen und wie oben beschrieben ist die Unterscheidbarkeit dieser Modelle für die Strukturidentifikation besonders wichtig, zumindest wenn kein weiteres Vorwissen über die Anordnung von Aktor und Sensor vorliegt. Die Beschränkung auf  $N = 3$  wird deswegen vorgenommen, weil sich für  $N = 1$  nur ein Modell ergibt und für  $N = 2$  bekannt ist, dass die beiden kollozierten Modelle unabhängig von den Parametern ein Antiresonanz-Resonanz-Verhalten (AR) zeigen, während das Modell 2A2 eine Resonanz (R) aufweist [CVK02]. Höhere Zahlen von Massen würden zu sehr langen Gleichungen führen und die Analyse wäre praktisch kaum relevant.



**Abbildung 4.2:** Lage der Wurzeln in der komplexen Ebene für  $s$  (schwarz) und  $\Omega$  (grau)

### 4.3.2 Mögliche Anordnungen von Pol- und Nullstellen beim Dreimassenschwinger

Die Verkettung von A's für Antiresonanzen und R's für Resonanzen ergibt den sog. *ÜTF-Typen*, z. B. ARR, ARAR, . . . . Das Ziel ist es, herauszufinden, welche ÜTF-Typen für jedes Modell möglich sind. Bevor die elf in Tabelle 2.3 gezeigten Modelle im Detail analysiert werden, kommen allgemeine Eigenschaften von Mehrmassensystemen zur Anwendung.

Die ÜTF-Matrix der dynamischen Nachgiebigkeit (d. h. Kraft zu Position) kann für den ungedämpften Fall geschrieben werden als:

$$\alpha(\omega) = (\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad \text{mit} \quad s = i\omega. \quad (4.11)$$

Die freien, ungedämpften Schwingungen in den Koordinaten  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)^T$  ergeben sich durch die Bestimmungsgleichung (verallgemeinertes Eigenwertproblem)

$$\mathbf{0} = (\mathbf{C} - \Omega \mathbf{M}) \mathbf{q} \quad \text{mit} \quad \Omega = \omega^2. \quad (4.12)$$

Zur Lösung können z. B. die Eigenwerte von  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}$  bestimmt werden. Mögliche Werte für  $\Omega$  sind die Diagonalelemente der Eigenwerte-Matrix  $\Lambda$ . Die zugehörigen Schwingungsmoden in den Koordinaten  $\mathbf{q}$  sind durch die Eigenvektor-Matrix  $\Psi$  gegeben. Da  $\mathbf{C}$  symmetrisch positiv (semi-)definit und  $\mathbf{M}$  symmetrisch positiv definit ist, sind die gesuchten Eigenwerte laut [Jan10; DH16] immer reell und nicht-negativ. Sie sind identisch mit den Polen der ÜTF (4.10) und dementsprechend kommt beim Nennerpolynom nur der linke Fall in Abb. 4.2 vor.

Mithilfe einer Umformung können weitere nützliche Eigenschaften gezeigt werden: Dazu wird die massennormierte Matrix der Eigenvektoren  $\Phi$  benötigt:

$$\Phi = \Psi \mathbf{M}_r^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_r = \Psi^T \mathbf{M} \Psi. \quad (4.13)$$

Sie ermöglicht es, die Nachgiebigkeitsmatrix mit der diagonalen Matrix  $\Lambda - \omega^2 \mathbf{I}$  zu schreiben:

$$\alpha(\omega) = \Phi (\Lambda - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \Phi^T. \quad (4.14)$$

Diese Schreibweise ist genau dann möglich, wenn die Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren zu jedem Eigenwert seiner algebraischen Vielfachheit entspricht. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn alle Eigenwerte verschieden sind [Lun20]. Diese Bedingung gilt es noch im Einzelfall zu prüfen. Ein einzelner Eintrag vom Krafteingang an der Koordinate  $k$  zur Position an der Koordinate  $j$  ist durch die Partialbruchform ([Ewi00]) gegeben:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\Phi_{jr} \Phi_{kr}}{\Lambda_{rr} - \omega^2}. \quad (4.15)$$

Aus (4.15) lassen sich zwei Eigenschaften ableiten: Erstens ist die ÜTF-Matrix symmetrisch, was bedeutet, dass die Systeme 3C2 und 3C4 die gleiche ÜTF haben und strukturell äquivalent sind. Zweitens kann die Eigenschaft des „interlacings“ bei kollokierten Systemen erklärt werden, d. h. zwischen zwei Polen bei  $\Lambda_{rr}$  und  $\Lambda_{r+1,r+1}$  tritt immer genau eine Nullstelle auf: Bei diesen Systemen gilt  $j = k$  und folglich ist der Zähler jedes Summanden in (4.15) positiv (die Elemente der Eigenvektoren sind bei ungedämpften Systemen reell). Damit ist der gesamte Bruch für  $\omega^2 < \Lambda_{rr}$  positiv und für  $\omega^2 > \Lambda_{rr}$  negativ. Die Addition dieser Brüche in der Summe von (4.15) führt zu Übergängen von negativ zu positiv zwischen benachbarten Resonanzen, die sich als Antiresonanzen zeigen [Ewi00]. Dies gilt auch für die Systeme 3B1\*, 3C1\*, 3C3\*, bei denen Sensor und Aktor differenziell zwischen zwei Massen sitzen, da die beschreibenden Koordinaten des Systems immer entsprechend gewählt werden können. Wegen der Lücke (ungefesselt System) wird die ÜTF der dynamischen Nachgiebigkeit  $\alpha_{jk}(\omega)$  immer den ersten Eigenwert bei null haben (integrierendes System) und entsprechend muss es vor der ersten Resonanzfrequenz ungleich null eine Nullstelle geben. Dies gilt auch für Beschleunigungsausgang und Geschwindigkeitsausgang, da die Pole und Nullstellen des ungedämpften Systems nicht von der Sensorart abhängen und sich nur die Pole im Ursprung unterscheiden. Folglich haben die Systeme 3A1\*, 3A4\*, 3B1\*, 3C1\* und 3C3\* ARAR-Frequenzgänge, es sei denn, es treten Doppelresonanzen in Kombination mit PNK auf, siehe Abschnitt 4.3.4.

Im Folgenden werden für jedes der elf Modelle alle denkbaren ÜTF-Typen gesammelt, die in Abhängigkeit der physikalischen Parameter auftreten können. Es wird davon ausgegangen, dass alle physikalischen Parameter reell und größer als null, aber nicht unendlich sind. Die Analyse beginnt mit den Nenner-Polynomen, gefolgt von den ÜTFen in Gänze.

### 4.3.3 Untersuchung der Nenner-Polynome

Fragen, die nicht durch die allgemeinen Regeln für Mehrmassenschwinger in Abschnitt 4.3.2 beantwortet werden konnten, werden im Folgenden anhand der ÜTF Gleichungen untersucht, die aus der linearen ZRD mit (4.6), ohne Anfangszustände, berechnet werden. Da der Nenner der ÜTF unabhängig von den Sensor- und Aktorpositionen ist, gibt es bei den elf Systemen nur drei verschiedene Nenner, gekennzeichnet durch den Buchstaben in der Bezeichnung in Tabelle 2.3 (A, B, C). Zunächst werden nur diese drei Nennerpolynome untersucht, bevor dann im nächsten Abschnitt auch die für jedes System unterschiedlichen Zählerpolynome analysiert werden. Wie oben erläutert, ist nur der linke Fall in Abbildung 4.2 für die Pole zu erwarten, aber es bleibt zu untersuchen, ob Doppelpole auftreten können.

Der Nenner von **Klasse A** ergibt sich durch Aufstellen der ÜTF eines dieser Systeme wie folgt:

$$D_A = m_{1.2.3}\Omega^2 - (c_{12}m_{1+2}m_3 + c_{23}m_1m_{2+3})\Omega + c_{12}c_{23}m_{1+2+3}. \quad (4.16)$$

Hier und im Folgenden werden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} m_{i+j} &:= (m_i + m_j), \\ m_{i \cdot j} &:= (m_i \cdot m_j) \end{aligned}$$

verwendet. Der Nenner  $D_A$  hat zwei Pole  $p_{1,2}$  in  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{c_{23}}{2m_{1 \cdot 2 \cdot 3}} \left( \mp \sqrt{R_A} + m_1 m_{2+3} + \frac{c_{12}}{c_{23}} m_3 m_{1+2} \right), \text{ mit} \\ R_A &= m_1^2 m_{2+3}^2 - \frac{m_2 m_{1+2+3} - m_{1 \cdot 3}}{c_{23}/(2c_{12} m_{1 \cdot 3})} + \frac{m_3 m_{1+2}^2}{c_{23}^2/c_{12}^2}. \end{aligned}$$

Sie sind immer verschieden, wie durch Auflösen nach den Federkonstanten in Abhängigkeit von  $p_1$  und  $p_2$  gezeigt werden kann:

$$c_{12} = \frac{m_{1 \cdot 2}}{2m_{1+2}} \left( \pm \sqrt{R_1} + p_1 + p_2 \right), \quad (4.17)$$

$$c_{23} = \frac{m_{2 \cdot 3}}{2m_{2+3}} \left( \mp \sqrt{R_1} + p_1 + p_2 \right), \quad (4.18)$$

$$\text{mit } R_1 = (p_1 - p_2)^2 - \frac{4m_{1 \cdot 3} p_1 p_2}{m_2 m_{1+2+3}}. \quad (4.19)$$

Ohne numerische Werte ist nicht bekannt, welche der beiden Lösungen für  $c_{12}$  und  $c_{23}$  richtig ist, aber das ist hier nicht von Interesse. Damit  $c_{12}$ ,  $c_{23}$  reell sind, ist es notwendig, dass  $R_1 \geq 0$  oder äquivalent  $(p_1 - p_2)^2 \geq \frac{4m_{1 \cdot 3} p_1 p_2}{m_2 m_{1+2+3}}$  ist. Also müssen  $p_1$  und  $p_2$  verschieden sein und Doppelpole können bei dieser Klasse nicht auftreten.

Der Nenner von **Klasse B** ist durch

$$D_B = (c_1 - m_1 \Omega)(c_{23} m_{2+3} - m_{2 \cdot 3} \Omega) \quad (4.20)$$

gegeben, wobei die beiden Pole

$$p_1 = \frac{c_1}{m_1}, \quad p_2 = \frac{c_{23} m_{2+3}}{m_{2 \cdot 3}} \quad (4.21)$$

dem linken und dem rechten Teil des Systems entsprechen, die durch den Spalt getrennt sind. Abhängig von den Parametern ist entweder  $p_1$  oder  $p_2$  größer:

$$\frac{c_1}{c_{23}} > \frac{m_1}{m_3} + \frac{m_1}{m_2} \Leftrightarrow p_1 > p_2 \quad (4.22)$$

und wenn Gleichheit in (4.22) gilt, fallen beide Resonanzen zusammen. Bei dieser Klasse sind Doppelpole also möglich.

Für **Klasse C** ist der Nenner

$$D_C = -m_{1.2.3}\Omega^2 + m_3(c_{12}m_{1+2} + m_2c_1)\Omega - c_1c_{12}m_3$$

mit den beiden Polen

$$p_{1,2} = \frac{c_{12}}{2m_{1.2}} \left( \mp \sqrt{R_C} + m_{1+2} + \frac{c_1m_2}{c_{12}} \right), \text{ mit} \quad (4.23)$$

$$R_C = m_{1+2}^2 - \frac{2c_1m_2(m_1 - m_2)}{c_{12}} + \frac{c_1^2m_2^2}{c_{12}^2}.$$

Ähnlich wie bei Klasse A können die Federkonstanten aus den Polen berechnet werden:

$$c_1 = \frac{m_1}{2} \left( \pm \sqrt{R_2} + p_1 + p_2 \right), \quad (4.24)$$

$$c_{12} = \frac{m_{1.2}}{2m_{1+2}} \left( \mp \sqrt{R_2} + p_1 + p_2 \right), \quad (4.25)$$

$$\text{mit } R_2 = (p_1 - p_2)^2 - 4\frac{m_2}{m_1}p_1p_2. \quad (4.26)$$

Bei reellwertigen Federkonstanten muss  $R_2$  positiv oder null sein und entsprechend  $(p_1 - p_2)^2 \geq 4\frac{m_2}{m_1}p_1p_2$ , sodass Doppelpole nicht möglich sind.

Damit stehen die möglichen Relationen der Polstellen zueinander für alle DMS-Systeme fest, aber es fehlt noch die Information, wo die Nullstellen in Bezug zueinander und zu den Polen liegen und ob PNK möglich ist. Dafür werden im nächsten Abschnitt die Nullstellen der Übertragungsfunktionen ausgewertet.

#### 4.3.4 Detailanalyse der elf DMS-Systeme

Für die zusätzliche Berücksichtigung der Nullstellen bei der angestrebten Charakterisierung der Systeme ist es erforderlich, jedes der elf Modelle separat zu untersuchen, weil sich die Zählerpolynome individuell unterscheiden. Häufig die Lösung allerdings schon durch Abschnitt 4.3.3 gegeben. Aufgrund der langwierigen Rechnungen sei an dieser Stelle auf [THPW21] verwiesen, während hier nur die Ergebnisse gezeigt werden.

In Tabelle 4.1 sind die zu erwartenden ÜTF-Typen für jedes Modell aufgelistet. In der rechten Spalte ist zudem angegeben, mit welchem System Verwechslungsgefahr besteht, weil es den entsprechenden ÜTF-Typen auch ausbilden kann.

Wie aus der Tabelle ersichtlich, kommen neben Resonanzen und Antiresonanzen auch nichtminimalphasige Nullstellen (nm), d.h. Nullstellen in der rechten  $s$ -HE, und ÜTFen mit konstanter Phase und Steigung der Amplitude vor (C). Allerdings beschränken sich diese Sonderfälle auf wenige Vorkommnisse. Das System 3B2 kann so parametrierbar werden, dass sich der ÜTF-Typ RR (nm)



**Tabelle 4.1:** Eigenschaften der Frequenzgänge der untersuchten Systeme. A: Antiresonanz, R: Resonanz, C: Konstante ohne Resonanzen oder Antiresonanzen, nm: nichtminimalphasig, d.h. Nullstellen existieren in der rechten  $s$ -HE

Bezeichnung	Mögliche ÜTF-Typen	Pot. ähnliche Systeme
3A1*	ARAR	3A4*, 3B1*, 3C1*, 3C3*
3A2	ARR, RAR, R	3A5
3A3	RR	-
3A4*	ARAR AR	3A1*, 3B1*, 3C1*, 3C3* 3B1*, 3B2
3A5	ARR, RAR, R	3A2
3B1*	ARAR AR	3A1*, 3A4*, 3C1*, 3C3* 3A4*, 3B2
3B2	RRAA, AARR, RA, RR (nm), A <sup>2</sup> RR, RRA <sup>2</sup> , C ARRA AR	- 3C2, 3C4 3B1*, 3A4*
3C1*	ARAR	3A1*, 3A4*, 3B1*, 3C3*
3C2	ARRA	3B2, 3C4
3C3*	ARAR	3A1*, 3A4*, 3B1*, 3C1*
3C4	ARRA	3B2, 3C2

ergibt, genauer gesagt handelt es sich um zwei Resonanzen und vier Nullstellen in der Anordnung

von Abbildung 4.2, rechts. Ein beispielhafter Frequenzgang für diesen Fall ist in Abbildung 4.3 gezeigt. Bei der gewählten Parametrierung, aber ohne Dämpfung, ergibt sich der Zähler

$$0,0003s^4 + 4,5s^2 + 20.000 \quad (4.27)$$

mit vier Nullstellen in  $s$  bei der gleichen Frequenz. Dadurch erhöht sich die Steigung der asymptotischen Amplitude bei etwa 14,4 Hz um 80 dB/Dek.

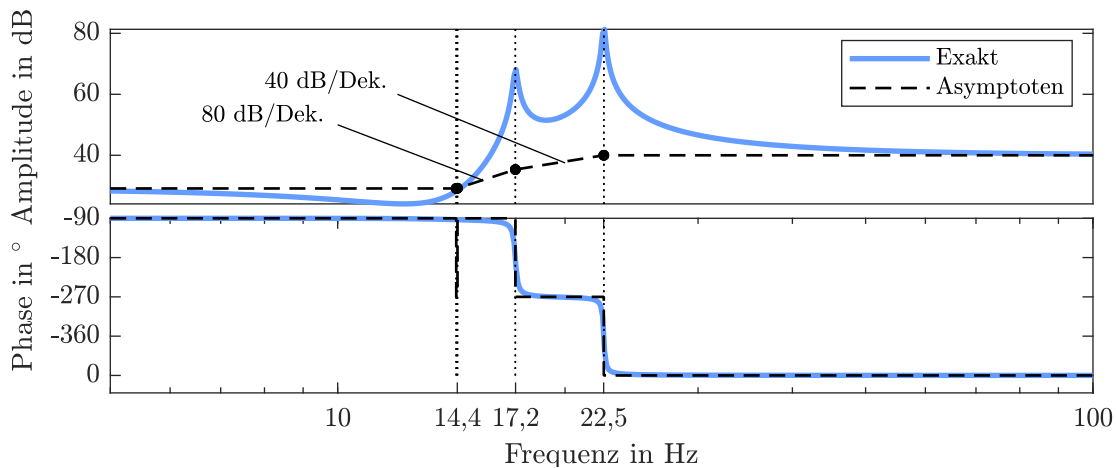
Bezüglich der Unterscheidbarkeit ist zu sagen, dass sich die Systeme zwar in dem betrachteten Muster unterscheiden, dass aber selten von der Anordnung der Resonanzen und Antiresonanzen eindeutig auf das zugehörige System geschlossen werden kann, weil es für einen ÜTF-Typen teilweise bis zu fünf mögliche Systeme gibt. Die meisten Systeme können je nach Parametrierung unterschiedliche Anordnungen von Resonanzen und Antiresonanzen ausbilden. In den Fällen 3A2, 3A4\*, 3A5\*, 3B1\*, 3B2 kommen einige dieser Anordnungen nur bei speziellen Parametrierungen vor, z. B. PNK. Dies zeigt die Stärke dieser Untersuchung und gleichzeitig, welche Informationen verloren gehen, wenn bei der strukturellen Unterscheidbarkeit die speziellen Parametrierungen vernachlässigt werden.

Mit Hilfe der Tabelle 4.1 könnte die Vorgehensweise zur Identifikation der Modellstruktur wie folgt aussehen. Zunächst wird die Anordnung der Pole und Nullstellen visuell aus dem gemessenen Frequenzgang ermittelt. Dann wird die Information, welche Systeme in Frage kommen, der Tabelle entnommen. Schließlich werden die Parameter aller möglichen Modelle durch Identifikation ermittelt und die Ergebnisse verglichen. Es ist denkbar, dass bei vermeintlich ununterscheidbaren Modellen dann doch entschieden werden kann, welches Modell am besten der Realität entspricht, weil manche Parametersätze weniger wahrscheinlich sind als andere. Dieser Punkt wird in den Beispielen des nächsten Abschnitts demonstriert.

#### 4.3.5 Beispiele und experimentelle Validierung

In diesem Abschnitt werden Beispiele für die Verwendung von Tabelle 4.1 gegeben. Als erstes wird ein simuliertes System vom Typ 3A2 verwendet, das gemäß Tabelle 4.2 so parametrierung ist, dass es eine ARR-ÜTF zeigt. Die Frage ist, welches System außer 3A2 diesen Typ erzeugen könnte, wobei als Vorwissen genutzt wird, dass alle physikalischen Parameter reell, endlich und größer als null sind. Das System 3A5, das als einziges auch diesen Frequenzgang zeigen kann, wird nun identifiziert. Wie in Abb. 4.4(a) zu sehen ist, sind beide Frequenzgänge in exakter Übereinstimmung. Außerdem sind die Parameter von System 3A5 alle positiv, siehe Tabelle 4.2. In diesem Fall ist es nicht möglich, die beiden Systeme ohne zusätzliche Sensorinformationen oder Expertenwissen zu unterscheiden. In Abschnitt 4.4.3 wird gezeigt, dass sie strukturell ununterscheidbar sind.

Als zweites Beispiel wird das System 3B2 so parametrierung, dass es ein ARRA-Verhalten zeigt und als erzeugendes Modell verwendet. Das System 3C2 wird als zu erstellendes Modell gewählt, da



**Abbildung 4.3:** Frequenzgang des Systems 3B2 in einer Parametrierung, die zu RR (nm) führt, also zwei Resonanzen und nichtminimalphasige Nullstellen.  $m_1 = 0,01$  kg,  $m_2 = 0,02$  kg,  $m_3 = 0,015$  kg,  $c_1 = 200$  N/m,  $d_1 = 0,01$  N · s/m,  $c_{23} = 100$  N/m,  $d_{23} = 0,01$  N · s/m

**Tabelle 4.2:** Parameter der Modelle 3A2 und 3A5 zu Abbildung 4.4(a). Alle Massen in kg, alle Federsteifigkeiten in N/m, Dämpfungskonstanten in N · s/m.

Bezeichner	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_{12}$	$c_{23}$	$d_1$	$d_{12}$	$d_{23}$
Erzeugendes Modell (3A2)	0,01	0,01	0,02	-	100	100	-	0,01	0,01
Zu bildendes Modell (3A5)	0,063	0,015	0,010	444	-	173	0,039	-	0,016

sein ÜTF-Typ ebenfalls ARRA ist. Es zeigt jedoch nach Identifikation der Parameter (Tabelle 4.3) einen anderen Frequenzgang, siehe Abb. 4.4(b).

**Tabelle 4.3:** Parameter der Modelle 3B2 und 3C2 entsprechend der ÜTF in Abb. 4.4(b). Alle Massen in kg, alle Federsteifigkeiten in N/m, Dämpfungskonstanten in N · s/m

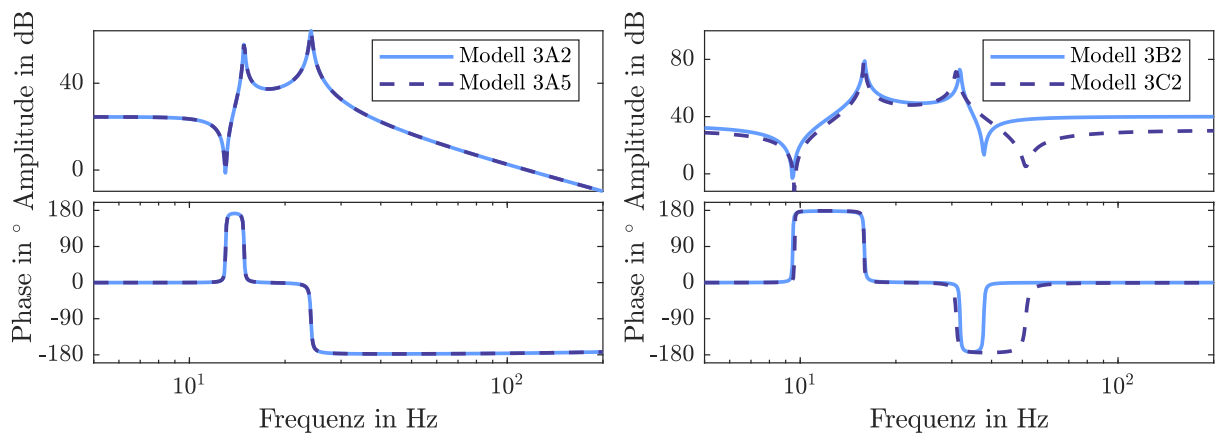
Bezeichner	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_{12}$	$c_{23}$	$d_1$	$d_{12}$	$d_{23}$
Erzeugendes Modell (3B2)	0,01	0,01	0,01	100	-	200	0,01	-	0,01
Zu bildendes Modell (3C2)	0,011	0,0044	0,030	190	96	-	0,01	0,01	-

Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass für das System 3C2 die Pole und Nullstellen auf folgende Weise verknüpft sind:

$$p_1 - n_1 = \frac{-m_3 c_{12} + R4 - R5(m_3)}{2m_{1,2}}, \tag{4.28}$$

$$n_2 - p_2 = \frac{m_3 c_{12} + R4 - R5(m_3)}{2m_{1,2}}, \tag{4.29}$$

wobei die genauen Terme der Abkürzungen  $R4$  und  $R5$  hier nicht von Interesse sind. Der Abstand  $n_2 - p_2$  muss also größer sein als  $p_1 - n_1$ , was die Abweichung in Abbildung 4.4(b) erklärt. Eine systematische Methodik zur Aufdeckung solcher Unterschiede wird in Abschnitt 4.4 erklärt, wo



(a) Frequenzgänge der Systeme 3A2 und 3A5 für äquivalente Parameterwerte (b) Frequenzgänge der Systeme 3B2 und 3C2, nachdem das zu bildende Modell, 3C2, so optimiert wurde, dass es dem erzeugenden Modell, 3B2, möglichst gut ähnelt

**Abbildung 4.4:** Vergleich der Modelle 3A2 und 3A5 bzw. 3B2 und 3C2

noch einmal auf dieses Beispiel eingegangen werden soll. Die Unterscheidbarkeit ergibt sich also in diesem Fall durch den Vergleich des ÜTF-Typs nicht korrekt, aber durchaus durch die Methodik aus Abschnitt 4.4. Das untersuchte Paar 3B2 vs. 3C2 ist somit ein Beispiel dafür, dass die gleiche Reihenfolge der Resonanzen und Antiresonanzen keine hinreichende Bedingung für Äquivalenz ist.

Als drittes Beispiel wird der gemessene Frequenzgang aus Abbildung 3.4(a) anstelle des erzeugenden Modells verwendet. Offensichtlich ist dieser Frequenzgang vom Typ ARAR. Gemäß Tabelle 4.1 müssen somit alle fünf kollokierten Systeme als Kandidaten betrachtet werden. Um das richtige Modell zu bestimmen, könnten die fünf Modelle identifiziert werden. Statt dessen ist es hier möglich, die Koeffizienten des ungedämpften Systems 3A1 zu identifizieren und mit den Koeffizientengleichungen der anderen Systeme ohne Dämpfung gleichzusetzen. Durch Auflösen ergeben sich dann die physikalischen Parameter der anderen Systeme. Es resultieren die in Tabelle 4.4 angegebenen Werte. Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass die Systeme 3A4\* und 3B1\* nicht global identifizierbar sind, denn es gibt jeweils zwei exakte Lösungen.

Als nächstes müsste nun auf Basis der resultierenden Parameterwerte entschieden werden, welches Modell richtig ist. Obwohl sich einige der Parameter um fast eine Größenordnung unterscheiden, ist dies ohne weitere Überlegungen, wie Überschlagsrechnungen zu den Massen der bewegten Teile o. Ä. wohl kaum möglich. Es ist in diesem Fall nur eine erste Eingrenzung der Modellkandidaten erfolgt.

**Tabelle 4.4:** Parameter der kollokierten Modelle ohne Dämpfung, die einen Frequenzgang wie in Abbildung 3.4(a) aufweisen können. Alle Massen in kg, alle Steifigkeiten in N/m. 3A4\* und 3B1\* lassen jeweils zwei Lösungen zu, d.h. sie sind nicht global identifizierbar.

ID	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$c_1$	$c_{12}$	$c_{23}$
3A1*	0,0044	0,0173	0,0184	-	46,8	14,3
3A4*	0,0084	0,0044	0,0273	-	31,4	15,3
	0,0273	0,0044	0,0084	-	15,3	31,4
3B1*	0,038	0,0049	0,0351	53,5	-	58,9
	0,0056	0,0194	0,0206	76,7	-	14,2
3C1*	0,0049	0,0091	0,040	31,5	27,4	-
3C3*	0,0421	0,0049	0,040	67,7	58,9	-

#### 4.3.6 Diskussion

Die für Dreimassenschwinger vorgestellte Methodik erlaubt eine einfache, erste Eingrenzung auf wenige potentielle Modelle durch visuelle Auswertung eines gemessenen Frequenzgangs. Außerdem liefert sie eine Abschätzung darüber, ob ein automatisch identifiziertes Modell eindeutig ist oder ob es eventuell weitere mögliche Modelle gibt.

Eine Erweiterung der Tabelle 4.1 auf z. B. verzweigte, gemischt rotatorische und translatorische oder komplexere Systeme wäre denkbar, allerdings stößt die Methode hier schnell an ihre Grenzen, weil die händische Herleitung erwartungsgemäß nicht immer möglich ist. Außerdem ist die Erkennung der Ausprägungen von Pol- und Nullstellen in manchen Fällen schwierig, insbesondere bei starker Dämpfung, bei doppelten Nullstellen oder bei nichtminimalphasigen Nullstellen. Als erschwerende Faktoren kommen Nichtlinearitäten und Rauschen hinzu.

Eine weitere Einschränkung ist, dass die Abfolge der Resonanzen und Antiresonanzen unterscheidbare Modelle nicht in jedem Fall aufdeckt, wie im Beispiel zu Abbildung 4.4(b). Die im nächsten Abschnitt beschriebene Methode erlaubt diesbezüglich eine genauere Analyse.

## 4.4 Unterscheidbarkeit anhand der Markov-Parameter und Koeffizienten der ÜTF

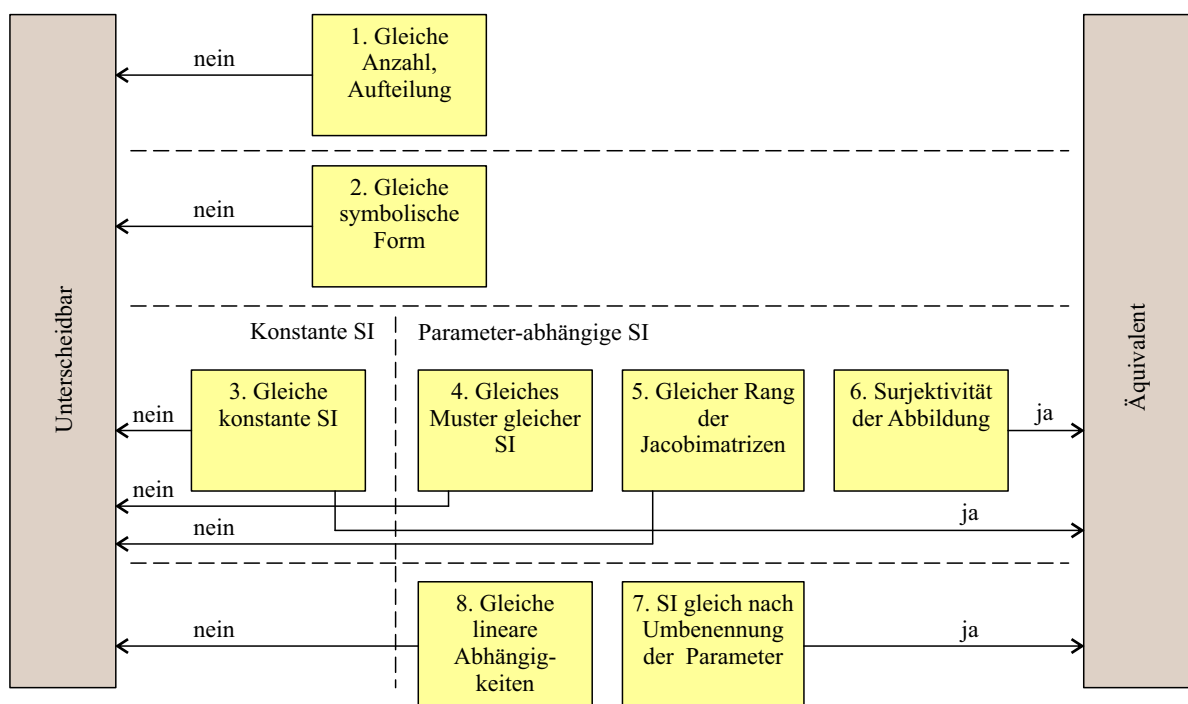
In diesem Abschnitt wird die Unterscheidbarkeit auf Basis von notwendigen und hinreichenden Kriterien anhand der Strukturinvarianten (SI) untersucht. Auch hier beschränkt sich die Analyse auf linear zeitinvariante Systeme, wie bereits in Abschnitt 4.3 begründet, und es werden die Ansätze LTA und MPA verfolgt, siehe Abschnitt 4.2.2.

Zunächst erfolgt eine Auflistung aller betrachteten Kriterien (Abschnitt 4.4.1). Diese Kriterien sind weitgehend unabhängig von den tatsächlich gewählten SI, also vom Ansatz LTA oder MPA. In Abschnitt 4.4.2 wird die Verwendung an einem einfachen Beispiel gezeigt und damit veranschau-

licht, dass die Wahl der SI durchaus einen Einfluss auf den Erfolg der Methode hat. Abschnitt 4.4.3 wendet die Methodik auf die Mehrmassenschwinger an und bewertet sowohl den Nutzen einzelner Varianten der Methoden als auch die Unterscheidbarkeit insgesamt. Die Ausführungen wurden in Teilen als [TPW21] publiziert.

#### 4.4.1 Sequentielle Überprüfung von Kriterien

Zur Unterscheidbarkeitsuntersuchung werden in dieser Arbeit die Gleichungssysteme  $\Phi_1(\theta_1) = \Phi_2(\theta_2)$  nicht vollständig gelöst, sondern einfachere Kriterien zur Überprüfung der Lösbarkeit angewendet, die hauptsächlich aus der Literatur stammen, wie im Folgenden beschrieben. Das Vorgehen ist in Abbildung 4.5 veranschaulicht und gleichermaßen auf LTA und MPA anzuwenden, wenn nichts anderes angegeben ist. Es muss bei der Auswertung von oben nach unten vorgegangen werden, weil teilweise die Ergebnisse aufeinander aufbauen. Außerdem sollten die Kriterien in der Reihenfolge ihrer Ordnungsnummer ausgewertet werden, um tendenziell zuerst die weniger aufwendigen Berechnungen durchzuführen. Die genaue Aufteilung in Schritte ist aber willkürlich und es ließen sich auch Schritte zusammenfassen. Doch durch die vielen einzelnen Abfragen sind genauere Aussagen zum Grund der Entscheidung möglich. Ist eines der Kriterien erfüllt und Unterscheidbarkeit bzw. Äquivalenz gezeigt, wie durch die Pfeile angegeben, kann die Analyse abgebrochen werden.



**Abbildung 4.5:** Schema zur Untersuchung der Unterscheidbarkeit durch Überprüfung der SI. Genauere Erklärungen und Literaturquellen sind im Text gegeben.

In Bezug auf die Definitionen von Abschnitt 4.2.1 wird die lokale oder die regionale Unterscheidbarkeit adressiert, wobei allerdings die Parameterbereiche nicht explizit berücksichtigt werden können, nicht einmal die Beschränkung auf positive Parameterwerte. Es hat sich aber gezeigt, dass dies praktisch keine große Einschränkung ist, weil bei den betrachteten Systemen meistens positive Werte resultieren. Eine explizite Angabe von Äquivalenz-Bereichen wäre schwer möglich.

Die Schritte / Kriterien sind wie folgt:

1. Es wird gemäß [DGA+17] geprüft, ob die *Anzahl der SI*  $N_{SI}$  zwischen beiden Systemen übereinstimmt und sie das gleiche Format haben, z. B. Koeffizienten zur gleichen Potenz von  $s$ .
2. Mit diesem Schritt wird sichergestellt, dass beide Sätze von SI die gleiche *symbolische Form* haben. Die symbolische Form ist eine Darstellung mit Nullen für konstante Elemente und Einsen für nicht-konstante (abhängig von  $\theta_1$  bzw.  $\theta_2$ ) Elemente [Vaj84]. Wenn die symbolische Form nicht gleich ist, also mindestens eine Konstante mit einem parameterabhängigen Ausdruck gleichgesetzt wird, stellt dies eine Zwangsbedingung für die beteiligten Parameter dar, die nur durch eine spezielle Parametrierung erfüllbar wäre. Also sind die Modelle nicht strukturell äquivalent.
3. Ausgehend von der Unterscheidung in konstante und parameterabhängige SI werden die konstanten direkt auf Gleichheit getestet. Für die parameterabhängigen sind die weiteren Schritte erforderlich, weil ein direkter Vergleich dort ohne Kenntnis der Parameterwerte nicht möglich ist.
4. Nun wird geprüft, ob SI, die in Modell 1 gleich sind (innerhalb des Modells), auch in Modell 2 gleich sind. Dies wurde in [ZCK91] für die Pole von MIMO ÜTFen vorgeschlagen, kann aber auch auf andere Gleichungen angewendet werden.
5. Die Jacobimatrix  $\mathbf{J}$  der gleichzusetzenden SI bezüglich der Parameter wird in symbolischer Form untersucht. Beide Modelle müssen den gleichen generischen Rang aufweisen, sonst sind sie unterschiedlich flexibel [ZCK91; VR88].
6. Es wird geprüft, ob der Rang der Jacobimatrix  $N_R$  gleich der Anzahl der SI ist. Ist dies der Fall, bestehen keine Zwangsbedingungen und die Modelle sind äquivalent, wenn auch streng genommen nicht zwangsläufig für die gesamten Parameterräume [Vaj84].
7. Dieser Schritt prüft bei Modellen mit gleich vielen Parametern, ob eine Abbildung zwischen den Variablen existiert, sodass durch Umbenennung der Variablen von System 1 die SI von System 2 entstehen und umgekehrt. In diesem Fall wären die Modelle strukturell äquivalent, wenn auch wieder ohne Berücksichtigung der genauen Parametergrenzen. Ein nicht-trivialer Fall, in dem dies ausgenutzt werden kann, ist, wenn die Systeme bis auf eine Spiegelung identisch sind. Es wird nach einer quadratischen Permutationsmatrix  $\mathbf{Z}$  gesucht, sodass  $\theta_1 = \mathbf{Z}\theta_2$  gilt. Sie enthält genau eine 1 in jeder Zeile und Spalte und ansonsten ausschließlich Nullen. Ein Ausprobieren aller möglichen Kombinationen würde zu  $N_\theta!$ -Vergleichen führen,

wenn  $N_\theta$  die Anzahl der Parameter in beiden Systemen ist. Oft ist es jedoch möglich, den Aufwand zu reduzieren, indem ausgenutzt wird, dass einige der SI nur eine Teilmenge der Parameter enthalten. Dadurch können bestimmte Einträge der Permutationsmatrix im Voraus festgelegt werden. Für den genauen Algorithmus sei auf [TPW21] verwiesen.

Für die Anwendung von Bedingungen 6 und 7 ist es notwendig, den vollen Satz von Strukturinvarianten zu betrachten, was die Anwendung dieser Kriterien in sehr komplexen Fällen verhindert.

8. Der letzte Schritt dient der vollständigen Prüfung der linearen Abhängigkeiten zwischen allen Kombinationen von zwei SI, drei SI, usw. Ein Beispiel für eine Abhängigkeit wäre wenn SI 3 als Kombination aus SI 1 und SI 2 aufgeschrieben werden könnte. Für den Test sollen alle Kombinationen der Zeilen von  $\mathbf{J}$  gefunden werden, die zu vollem Zeilenrang führen. Ergibt sich bei einer bestimmten Menge von Zeilen kein voller Rang, ist die Abbildung nicht surjektiv und es bestehen Abhängigkeiten zwischen den Termen. Die resultierende Menge linear unabhängiger Zeilensätze muss bei beiden Modellen übereinstimmen, weil sonst die Forderung nach gleicher Flexibilität zumindest auf einen Teil der SI nicht zutreffen würde [ZCK91]. In [DGA+17] wird ein Computer-Programm präsentiert, das diesen Test umsetzt und abbricht, sobald Unterscheidbarkeit gezeigt wurde.

Für die vollständige Charakterisierung ist es notwendig, alle Untermatrizen von  $\mathbf{J}$  auf vollen Rang zu überprüfen, die durch Weglassen von Zeilen aus  $\mathbf{J}$  gebildet werden können. Es genügt allerdings, nur die Untermatrizen mit genau  $N_R$  Zeilen zu bilden, was zu

$$\binom{N_{SI}}{N_R}$$

Kombinationen führt. Diese Schreibweise steht für den Binomialkoeffizienten. Diejenigen Zeilenkombinationen, die vollen generischen Zeilenrang aufweisen, werden notiert, woraus sich alle weiteren Rangbestimmungen ergeben. Größere Untermatrizen als  $N_R$  Zeilen müssen nicht geprüft werden, denn sie wären zwangsläufig linear abhängig. Kleinere Untermatrizen müssen deshalb nicht geprüft werden, weil sie genau dann linear unabhängig sind, wenn sie in einer größeren Matrix mit vollem Zeilenrang vollständig enthalten sind. Diese Tatsache erlaubt eine erhebliche Reduktion der Anzahl zu prüfender Matrizen und ist daher in Anhang A bewiesen. Sobald bekannt ist, welche Untermatrizen von  $\mathbf{J}$  vollen Rang aufweisen und welche nicht, lassen sich daraus auch die Ränge sämtlicher Untermatrizen ableiten, denn der Rang einer Matrix mit linear abhängigen Zeilen und Spalten definiert sich als der Rang der Rang-größten Untermatrix [Bos06], Korollar 5. Die Untersuchung kleinerer und größerer Untermatrizen als solche mit  $N_R$  Zeilen ergibt also keine weiteren Informationen und kann für die Unterscheidbarkeitsuntersuchung weggelassen werden.



#### 4.4.2 Abhängigkeit von der Wahl der Gleichungen

Wenn die in Abschnitt 4.4.1 vorgestellten Kriterien in der angegebenen Reihenfolge getestet werden, kann es vorkommen, dass keines der Kriterien anwendbar ist und somit keine Aussage über die Unterscheidbarkeit von zwei Modellen getroffen werden kann. Dabei ist es möglich, dass für eine bestimmte Wahl der Gleichungen, z. B. Koeffizienten der ÜTF, oder Markov-Parameter, eine Entscheidung zustande kommt und für eine andere Wahl nicht. Dies soll zunächst exemplarisch an einem Minimalbeispiel gezeigt werden, bevor in Abschnitt 4.4.3 u. a. der Vergleich von Koeffizienten der ÜTF vs. Markov-Parameter angestellt wird.

Als mathematisches Beispiel seien zwei Punkte im Raum durch kartesische Koordinaten als SI beschrieben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= a_1 \mathbf{e}_x + b_1 \mathbf{e}_y + b_1 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}_2 &= a_2 \mathbf{e}_x + b_2 \mathbf{e}_y + a_2^2 \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Die Modellparameter sind  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ . Eine andere Möglichkeit, die zwei Punkte eindeutig zu definieren, ist durch die Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  gegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \mathbf{e}_r + \arctan(b_1/a_1) \mathbf{e}_\varphi + b_1 \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}_2 &= \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \mathbf{e}_r + \arctan(b_2/a_2) \mathbf{e}_\varphi + a_2^2 \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Es stellt sich die Frage, welche Darstellung eine Bewertung der Unterscheidbarkeit erlaubt. Dazu werden die Regeln aus Abschnitt 4.4.1 angewendet.

Die Jacobimatrizen zu (4.30) sind bei lexikographischer Parameterordnung gegeben durch:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2a_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Die Jacobimatrizen zu (4.31) sind bei lexikographischer Parameterordnung gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \begin{bmatrix} a_1/\sqrt{a_1^2 + b_1^2} & b_1/\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \\ -b_1/(a_1^2 + b_1^2) & a_1/(a_1^2 + b_1^2) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_2 &= \begin{bmatrix} a_2/\sqrt{a_2^2 + b_2^2} & b_2/\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ -b_2/(a_2^2 + b_2^2) & a_2/(a_2^2 + b_2^2) \\ 2a_2 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Bedingungen 1, 2, 3, 5, 6 und 7 ermöglichen in beiden Darstellungen keine Aussage, denn in jedem Fall ist die Anzahl der SI gleich (3), es gibt keine konstanten SI und der Rang der Jacobimatrix ist  $2 < 3$ . Auch ist es nicht möglich, Äquivalenz durch Umbenennen der Parameter zu zeigen, denn die  $z$ -Koordinate verhindert dies.

Bedingung 4 zeigt im Fall von (4.30), dass die beiden Modelle unterscheidbar sind, denn es sind die letzten zwei SI in  $r_1$  gleich, während sie es in  $r_2$  nicht sind. Bei (4.31) gibt es dagegen bedingt durch die andere Formulierung keine gleichen SI und die Bedingung liefert keine Aussage.

Bedingung 8 ermöglicht ebenfalls im Fall von (4.30) die Aussage, dass die beiden Modelle unterscheidbar sind, denn eine Betrachtung der Jacobimatrizen in (4.32) zeigt, dass bei  $J_1$  die Zeilenkombinationen (1, 2), (1, 3) vollen Rang aufweisen, während es bei  $J_2$  die Zweierkombinationen (1, 2), (2, 3) sind. Im Fall von (4.33) haben immer alle drei Zeilenkombinationen vollen Rang und es ist keine Aussage möglich.

Das Beispiel zeigt, dass die Wahl der Darstellung einen Einfluss darauf hat, ob eine Aussage über die Unterscheidbarkeit mithilfe der notwendigen und hinreichenden Kriterien gemacht werden kann oder nicht. Bei diesem Beispiel war die Einfachheit der kartesischen Darstellung dafür verantwortlich, dass es hier möglich war, eine Aussage zu treffen.

Wenn der Ausdruck  $b_1$  in der  $z$ -Koordinate ersetzt wird durch z. B.  $2b_1$ , liefert Bedingung 4 keine Aussage mehr, aber Bedingung 8 funktioniert unverändert. Andererseits ist es möglich, das Beispiel dahingehend zu verändern, dass nur Bedingung 4 eine Aussage liefert und nicht Bedingung 8. Dies ist dann der Fall, wenn in der  $z$ -Koordinate von  $r_2$  das  $a_2^2$  ersetzt wird durch  $2b_2$ . Dies rechtfertigt die Existenz beider Bedingungen.

Die Tatsache, dass die Frage, ob eine Entscheidung getroffen werden kann oder nicht, von den gewählten SI abhängt, motiviert die Analyse verschiedener Formulierungen der SI, wenn sich mit der ersten Wahl keine Aussage machen lässt.

#### 4.4.3 Unterscheidbarkeit von Dreimasenschwingermodellen ohne Zusatzsensorik

Die Unterscheidbarkeit der elf DMS-Modelle aus Tabelle 2.3 ohne Zusatzsensorik wird nun mit Hilfe der Bedingungen aus Abschnitt 4.4.1 untersucht. Dabei werden die Koeffizienten der ÜTF (LTA=Laplace-Transformations-Ansatz) und die Markov-Parameter (MPA=Markov-Parameter-Ansatz) ausgewertet. Ziel ist es zum einen, Varianten der Methodik miteinander zu vergleichen, wozu der kreuzweise Vergleich von immerhin elf Modellen eine gute Basis darstellt. Zum anderen ist die Unterscheidbarkeit der Modelle von Interesse, weil sie viele realistische Fälle abdecken. Für die symbolischen Berechnungen nutzt eine Matlab Implementierung die vier Kerne eines PCs mit 3.4 GHz.

Es wird angenommen, dass alle Sensoren Beschleunigungen messen. Für Geschwindigkeits- (Positions-) Sensoren können die gleichen Ergebnisse erzielt werden, außer dass die Markov-Parameter und ÜTF-Koeffizienten um eins (zwei) verschoben wären, ohne dass dies Auswirkungen

auf den Rechenaufwand hätte. Zunächst wird die Dämpfung vernachlässigt, d.h. auf null gesetzt. Beim MPA werden die ersten 8 Markov-Parameter und der Durchgangsanteil ausgewertet. Das resultierende Muster von unterscheidbaren und nicht unterscheidbaren Modellkombinationen ist in Abb. 4.6 für den LTA und für den MPA mit acht Markov-Parametern dargestellt. Es wird jedes Modell mit jedem anderen verglichen, wobei nur eine Hälfte der symmetrischen Matrix dargestellt ist. Die Hauptdiagonale wird nur zur Kontrolle ausgewertet. Die Zahl in jedem Feld gibt die erste Bedingung aus Abschnitt 4.4.1 an, die die Entscheidung verursacht hat.

Es ist zu sehen, dass ohne Dämpfung mit dem LTA ein Ergebnis für alle Modellkombinationen zustande kommt. Bei äquivalenten Paaren kann meistens mit Bedingung 6 Äquivalenz gezeigt werden, außer in einigen Fällen, in denen der Rang  $N_R$  nur vier beträgt, obwohl es fünf Parameter und auch fünf nicht-konstante Koeffizienten gibt. In diesen Fällen liefert Bedingung 7 einen zusätzlichen Nutzen und ist somit als Untersuchungskriterium gerechtfertigt.

Exemplarisch sei das System 3C2 genauer analysiert, welches schon in Abschnitt 4.3.5 durch seine reduzierte Flexibilität aufgefallen war. Die Jacobimatrix der nicht-konstanten Koeffizienten

$$J_{3C2} = \begin{pmatrix} -\frac{c_1 c_{12}}{m_{1.1.2.3}} & -\frac{c_1 c_{12}}{m_{1.2.2.3}} & -\frac{c_1 c_{12}}{m_{1.2.3.3}} & \frac{c_{12}}{m_{1.2.3}} & \frac{c_1}{m_{1.2.3}} \\ -\frac{c_1 m_2 + c_{12} m_{2+3}}{m_{1.1.2.3}} & -\frac{c_{12} m_{1+3}}{m_{1.2.2.3}} & -\frac{c_1 m_2 + c_{12} m_{1+2}}{m_{1.2.3.3}} & \frac{1}{m_{1.3}} & \frac{m_{1+2+3}}{m_{1.2.3}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_3} & 0 & 0 \\ -\frac{c_1 c_{12}}{m_{1.1.2}} & -\frac{c_1 c_{12}}{m_{1.2.2}} & 0 & \frac{c_{12}}{m_{1.2}} & \frac{c_1}{m_{1.2}} \\ -\frac{c_1 + c_{12}}{m_1^2} & -\frac{c_{12}}{m_2^2} & 0 & \frac{1}{m_1} & \frac{m_{1+2}}{m_{1.2}} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

hat zwar fünf Zeilen und Spalten, aber der Rang ist nur vier, weil folgende Abhängigkeit zwischen den Zeilen  $J_{3C2,i}$  besteht:

$$J_{3C2,4} - J_{3C2,1} \cdot m_3 + J_{3C2,3} \frac{c_1 c_{12} m_3}{m_{1.2}} = 0. \quad (4.35)$$

Dadurch ist Bedingung 6 nicht anwendbar.

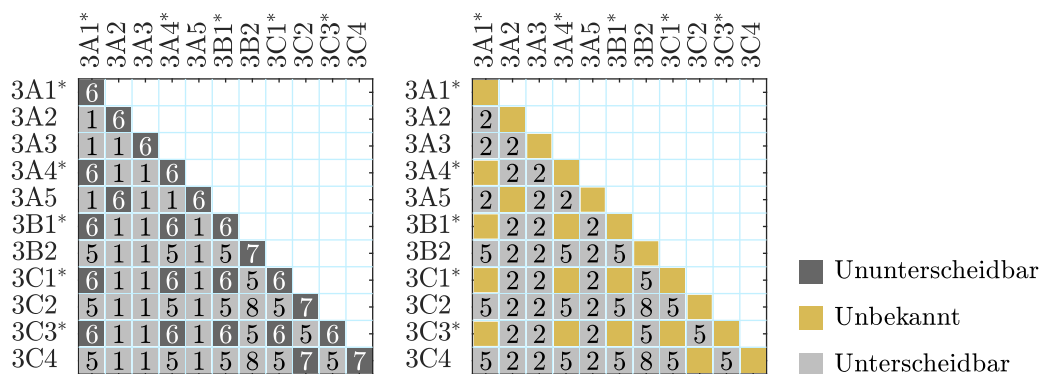


Abbildung 4.6: Unterscheidbarkeitsanalyse ohne Dämpfung. Links: LTA, rechts: MPA mit acht Markov-Parametern

Für den Vergleich von 3C2 mit 3B2 ist Bedingung 8 relevant, weil zwar beide Systeme den gleichen Rang haben (vier), aber unterschiedliche lineare Abhängigkeiten zwischen den Zeilen der Jacobimatrizen vorliegen: Die größten Mengen linear unabhängiger Zeilen sind bei 3C2

$$\{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\} \quad (4.36)$$

(und die kleinste Menge linear abhängiger Zeilen ist  $\{1, 3, 4\}$ , siehe (4.35)). Bei 3B2 sind die größten Mengen linear unabhängiger Zeilen, ohne Herleitung

$$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\} \quad (4.37)$$

(d. h. der kleinste Satz linear abhängiger Zeilen umfasst alle Zeilen). Somit kann Bedingung 8 den Unterschied zwischen beiden Systemen aufzeigen.

Der MPA (rechte Grafik in Abbildung 4.6) liefert keine Widersprüche, kann aber die Ununterscheidbarkeiten nicht beweisen. Dies liegt hauptsächlich an der Komplexität der Ausdrücke, die fast immer alle Modellparameter enthalten und mit zunehmender Ordnung sehr lang werden. Desweiteren ist Bedingung 6 nicht anwendbar, weil die Gesamtzahl von  $N_{Z1} + N_{Z2} = 12$  deutlich größer ist als fünf, die Anzahl der Parameter. Dieser Unterschied reduziert sich nur wenig durch die konstanten, nicht mit gezählten SI. Bedingung 7 ist nicht anwendbar, weil nur die ersten acht der insgesamt zwölf Markov-Parameter berechnet wurden. Bei neun bis elf Markov-Parametern würde sich das gleiche Bild ergeben und bei der Auswertung von allen zwölf kann zusätzlich, so wie in der linken Abbildung, Bedingung 7 ausgewertet werden. Die Rechenzeit für einen Vergleich beträgt dann allerdings mehrere Stunden in der angegebenen Konfiguration. Für den Fall, dass weniger Markov-Parameter als acht berechnet werden, vergrößern sich die Bereiche ohne Entscheidung. Bei diesem Vergleich ergibt sich insgesamt kein Zusatznutzen durch die Auswertung der Markov-Parameter.

Wird die Dämpfung mit einbezogen, siehe Abb. 4.7, kann weder der LTA, noch der MPA mit sieben Markov-Parametern eine Antwort auf die Frage der Unterscheidbarkeit für alle Kombinationen ableiten. Der Grund dafür ist, dass hier die Bedingung 6 im Fall mit Dämpfung nicht anwendbar ist, weil die Anzahl der nicht-konstanten ÜTF-Koeffizienten (sieben bis neun, sieben nur für Modell 3A3) fast immer größer ist als die Anzahl der Modellparameter (sieben). Es ergeben sich unbestimmte Bereiche. Ohne Dämpfung ist die Anzahl der nicht konstanten ÜTF-Koeffizienten (drei bis fünf) kleiner oder gleich der Anzahl der Modellparameter (fünf). Für die anderen Bedingungen ist die Situation mit und ohne Dämpfung in diesen Bereichen gleich.

Es ist bemerkenswert, dass in Abb. 4.7 die Markov-Parameter in einigen Fällen Ununterscheidbarkeit zeigen, wo dies mit den Koeffizienten der ÜTF nicht möglich ist. Ein solcher Fall ist in Abbildung 4.8 dargestellt, wo das System 3A4\* so optimiert wurde, dass es der ÜTF von 3A1\* ähnelt. Während die Frequenzen der Resonanzen und Antiresonanzen übereinstimmen, ist es nicht möglich, die Dämpfung an allen vier Extremstellen gleichzeitig anzupassen. Die Modelle sind also

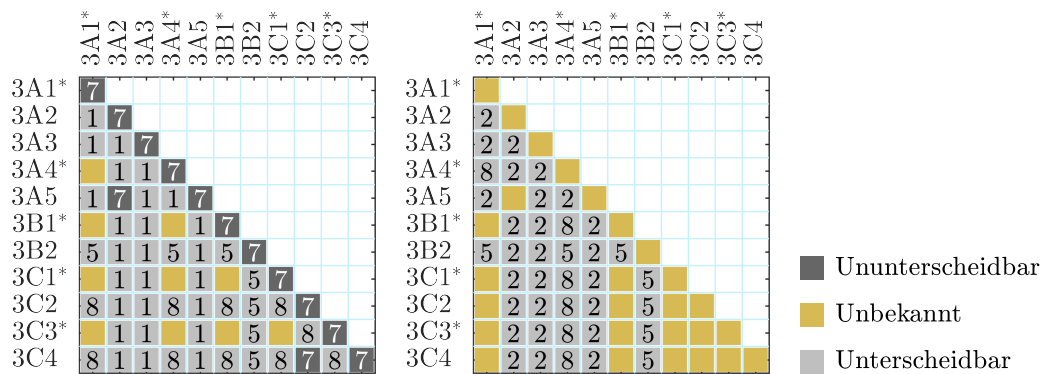


Abbildung 4.7: Unterscheidbarkeitsanalyse inkl. Dämpfung. Links: LTA, rechts: MPA mit 7 Markov-Parametern

tatsächlich unterscheidbar, aber der Unterschied ist klein. Aus praktischen Gesichtspunkten wird sich ein solcher minimaler Unterschied wohl kaum zur Identifikation der Modellstruktur eignen. Das Ergebnis zeigt, dass der MPA einen Nutzen hat. Für acht bis elf Markov-Parameter ergibt sich das gleiche Muster und für alle zwölf Markov-Parameter ergibt sich zusätzlich in all den Fällen eine Entscheidung durch Bedingung sieben, wo diese auch in der linken Abbildung eine Entscheidung ermöglicht hat. Der Rechenaufwand ist dann allerdings wieder im Bereich mehrerer Stunden für einen Vergleich, während mit dem LTA nur wenige Sekunden benötigt werden. sechs oder weniger Markov-Parameter führen zu größeren Bereichen ohne Entscheidung.

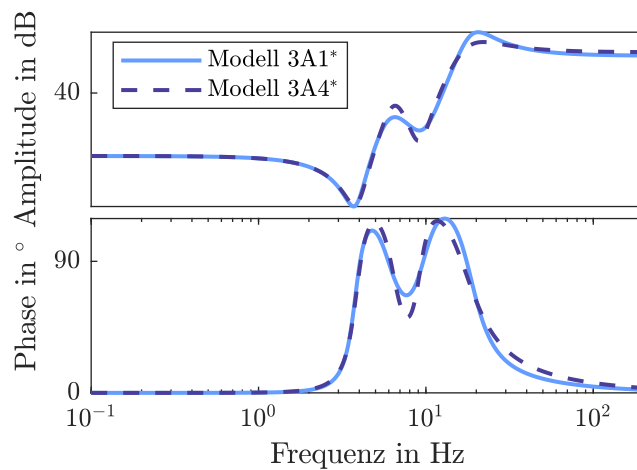


Abbildung 4.8: System A4 angepasst an A1 mit beliebiger Parametrierung, einschließlich Dämpfung

Unabhängig von den Methoden lässt sich über die Unterscheidbarkeit sagen, dass diese häufig nicht gegeben ist. In Abbildung 4.6, links, wo für jede Kombination eine Aussage möglich ist, gibt es zahlreiche als nicht unterscheidbar ausgewiesene Bereiche. Wie anhand der Untersuchungen zu den Resonanzen und Antiresonanzen (Abschnitt 4.3) zu erwarten, sind die kollokierten Modelle nicht unterscheidbar. Die genauen Frequenzen der Resonanzen und Antiresonanzen können durch die fünf Systemparameter (drei Massen und zwei Federkonstanten) eingestellt werden und lassen keinen Rückschluss auf das zugrundeliegende Modell zu. Zusätzlich sind die Modelle 3A2 und

3A5 nicht unterscheidbar, weil sie sich durch rechts-links-Spiegelung und Aktor-Sensor-Tausch ineinander überführen lassen. Ähnliches gilt auch bei 3C2 vs. 3C4.

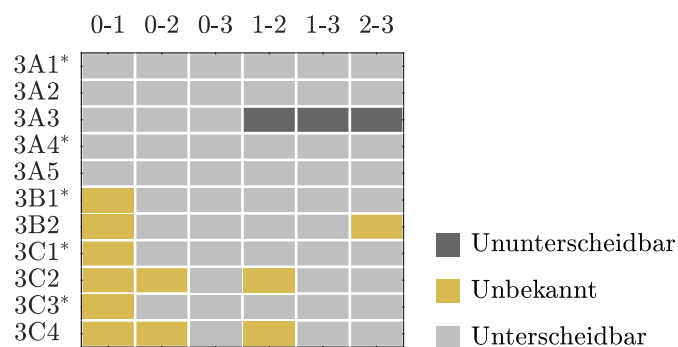
Die gewählte Zusammensetzung der Prüfkriterien ist wahrscheinlich nicht vollständig und könnte noch erweitert werden, um die unbekannt Bereiche zu eliminieren. Die Bedingung 3 war bei den untersuchten Modellen nie ausschlaggebend, weil hier alle konstanten SI stets null waren. Im Allgemeinen ist es aber notwendig, auch die konstanten SI zu prüfen, weil alle SI für Gleichheit übereinstimmen müssen.

Streng genommen sollten zusätzlich die Parameterbereiche ausgewertet werden. Es muss also bei gegebenen Parametern des erzeugenden Modells überprüft werden, ob die Parameter des zu bildenden Modells in einem zulässigen Wertebereich liegen, z. B. positiv sind. Bei diesen strukturellen Untersuchungen und den komplexen Ausdrücken ist das jedoch nicht ohne weiteres möglich und wurde nicht weiter betrachtet.

#### 4.4.4 Unterscheidbarkeit der Dämpferpositionen

Zuletzt wird der Frage nachgegangen, ob es unterscheidbar ist, an welcher Stelle eines Mehrmassenschwingers ein Dämpfer zur Umgebung angebracht ist, wie dies in den Versuchen zu Abbildung 3.3 angenommen wurde. Das Ergebnis in Kombination mit sonst gedämpften Systeme ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Für jedes der elf DMS-Systeme wird gezeigt, welche Kombinationen von Dämpfern unterscheidbar sind, z. B. bedeutet 0-1, es wird der Vergleich zwischen keinem Dämpfer und einem Basisdämpfer an Masse 1 angestellt.

Es ist zu sehen, dass bei einigen Systemen, z. B. 3A3 und eventuell anderen, die korrekten Positionen der Dämpfer nicht bestimmbar sind. Bei dem System 3A1\* ist die Unterscheidbarkeit aber sichergestellt, d. h. der in Abschnitt 3.2.3 gewählte Satz potentieller Modelle ist in der Hinsicht angemessen.



**Abbildung 4.9:** Unterscheidbarkeit der Dämpferpositionen: kein Dämpfer (0), vs. Dämpfer an den Positionen 1, 2 und 3

## 4.5 Nutzen von Zusatzsensorik für die Unterscheidbarkeit

Da sich in den Abschnitten 4.3 und 4.4 gezeigt hat, dass die betrachteten Mehrmassenschwinger-Modelle in vielen Fällen nicht unterscheidbar sind, bietet es sich wieder an, weitere Sensoren zumindest temporär für die Inbetriebnahme zu installieren und mit auszuwerten. In diesem Abschnitt soll deren Nutzen in Bezug auf die Unterscheidbarkeit untersucht werden. Die Ausführungen stellen die Erweiterung der Veröffentlichungen [TPWa; TPWb] dar.

Abschnitt 4.5.1 zeigt zunächst mehrere Möglichkeiten auf, von Zusatzsensoren Gebrauch zu machen, die dann in Abschnitt 4.5.2 theoretisch evaluiert werden. Schließlich werden in den Abschnitten 4.5.3 und 4.5.4 Versuche zur Strukturidentifikation mit Beschleunigungssensoren beschrieben und ausgewertet.

### 4.5.1 Definition von Szenarien

Mit der Hinzunahme von Sensoren vervielfachen sich die kombinatorischen Möglichkeiten aufgrund der zusätzlichen Systemausgänge und das Problem der Strukturidentifikation wird zunächst nicht einfacher, sondern komplexer. Es muss zwangsläufig auch Vorwissen über die neuen Sensoren berücksichtigt werden, damit diese einen Vorteil bieten können. Andererseits ist nicht anzunehmen, dass der Anwender des Verfahrens die Positionen der zusätzlichen Sensoren vollständig angeben kann. Zwar ist es offensichtlich, auf welchem Strukturelement ein Sensor platziert ist, aber die Zuordnung von Strukturelementen zu Massen des Modells dürfte in den meisten Fällen nicht a priori bekannt sein, da vor der Durchführung der Strukturidentifikation wenig Verständnis des System vorausgesetzt wird.

Daher sollen die folgenden drei Fragen untersucht werden, die unterschiedliches Vorwissen voraussetzen. Der primäre Sensor oder Standardsensor, der in Tabelle 2.3 eingezeichnet ist, ist vom Zusatzsensor zu unterscheiden, der nur ein vorübergehendes Hilfsmittel darstellt. Die Bestimmung seiner Position kann jedoch ebenfalls von Interesse sein:

- I. Verbessert sich die Unterscheidbarkeit durch Zusatzsensoren am linken und / oder rechten Kraftangriffspunkt? Es sollte möglich sein, zu erkennen, an welcher Stelle der Aktor angreift. Dazu muss nicht vollständig das Mehrmassenschwinger-Verhalten des Systems verstanden sein.
- II. Verbessert sich die Unterscheidbarkeit durch einen zusätzlichen Sensor an einer völlig unbekanntem Position an einer der Massen? Dies setzt besonders wenig Vorwissen voraus, aber es muss immerhin sichergestellt sein, dass der Sensor tatsächlich auf einer der Massen des Modells sitzt und nicht z. B. auf einer Feder.
- III. Kann bei bekanntem Modell aus den Messdaten die Masse bestimmt werden, auf der der zusätzliche Sensor montiert ist? Die Aufgabe besteht nun darin, die Zuordnung zwischen dem entsprechenden Bauteil und der zugehörigen Masse des Mehrmassenschwingers herzustellen.

Bei der Untersuchung dieser Fragen wird davon ausgegangen, dass die Zusatzsensoren immer die absolute Geschwindigkeit oder Beschleunigung einer Masse und nicht Differenzen messen, da dies der Verwendung von leicht verfügbaren Drehraten- oder Beschleunigungssensoren entspricht, die ohne großen Aufwand installiert werden können.

Mit der Erweiterung auf mehrere Sensoren stellt sich die Frage, wie stark die Anzahl der auszuwertenden Gleichungen und damit der Rechenaufwand steigt und ob es überhaupt noch möglich ist, Lösungen zu finden. Beim LTA steigt die Anzahl der auszuwertenden Koeffizienten unterproportional mit der Anzahl der Eingänge und Ausgänge, weil der Nenner für alle Einträge identisch ist und seine Koeffizienten somit nicht mehrfach ausgewertet werden müssen [DGA+17]. Beim MPA nutzt ein möglicher Argumentationsweg das „generalisierte“ Cayley-Hamilton Theorem, welches in [PLL98] im Kontext der modellprädiktiven Regelung vorgestellt wurde und in Anhang B auf das gegebene Problem angewandt wird. Es zeigt sich aber, dass dadurch nur eine Vereinfachung möglich wäre, wenn mit den zusätzlichen Sensoren bestimmte Beobachtbarkeitsbedingungen erfüllt würden. Die Überprüfung dieser Beobachtbarkeitsbedingungen wäre ähnlich aufwendig wie die vollständige Unterscheidbarkeitsanalyse, sodass tatsächlich die Anzahl der auszuwertenden Markov-Parameter nicht reduziert werden kann und proportional mit den Ausgängen steigt.

Weil der Rechenaufwand teilweise überproportional zu der Anzahl der Gleichungen steigt, insbesondere für die Kriterien 5, 7 und 8, bietet es sich an, die Sensoren einzeln auszuwerten und anschließend nur das beste Ergebnis zu zählen. Es ist jedoch nicht auszuschließen, dass durch diese Vereinfachung Informationen ungenutzt bleiben, die sich sonst aus dem Vergleich mehrerer Sensorsignale ergeben hätten. Die gleichzeitige Auswertung von mehreren Sensoren wird im Folgenden als SIMO-Ansatz bezeichnet, die sequentielle Auswertung als SISO-Ansatz. Beides soll miteinander verglichen werden.

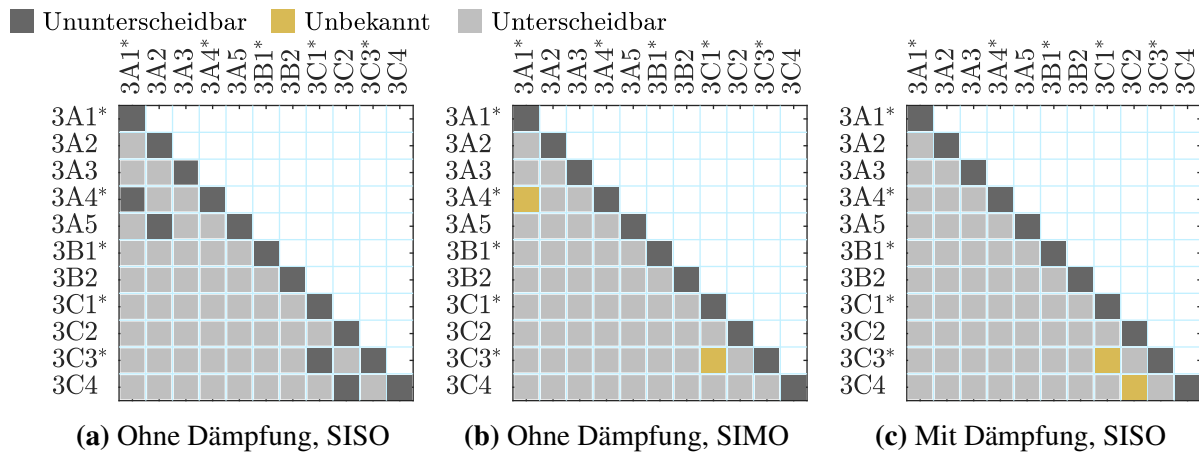
#### 4.5.2 Ergebnisse der theoretischen Untersuchungen

Die Unterscheidbarkeit wird für die elf Modelle aus Tabelle 2.3 mit Hilfe der Bedingungen aus Abschnitt 4.4.1 analysiert, die auf die ÜTF-Koeffizienten und die ersten sieben Markov-Parameter angewendet werden. Auf die Angabe, welches Kriterium und welcher Satz von SI jeweils die Entscheidung herbeigeführt haben, wird der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Bei allen Sensoren wird wieder angenommen, dass sie Beschleunigungen messen. Andere Signale lassen sich aufgrund der integralen Beziehungen in Beschleunigungen umwandeln. Dadurch gehen nur Informationen über die Anfangszustände verloren, welche nicht für die Unterscheidung verwendet werden.

Das **Ergebnis zu Frage I** aus Abschnitt 4.5.1 ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Es kann festgehalten werden, dass sich die Unterscheidbarkeit durch die Zusatzsensorik deutlich verbessert. Mit Dämpfung und SIMO-Ansatz sind sogar alle Modelle nachweislich unterscheidbar (nicht dargestellt). Weiterhin ist zu erkennen, dass die gleichzeitige Auswertung mehrerer Signale mehr Systeme unterscheidbar macht. Ein Beispiel ist 3A2 vs. 3A5. Sie sind mit dem SISO-Ansatz ohne Dämpfung nicht unterscheidbar, da der primäre Sensor sie nicht unterscheiden kann, siehe oben,

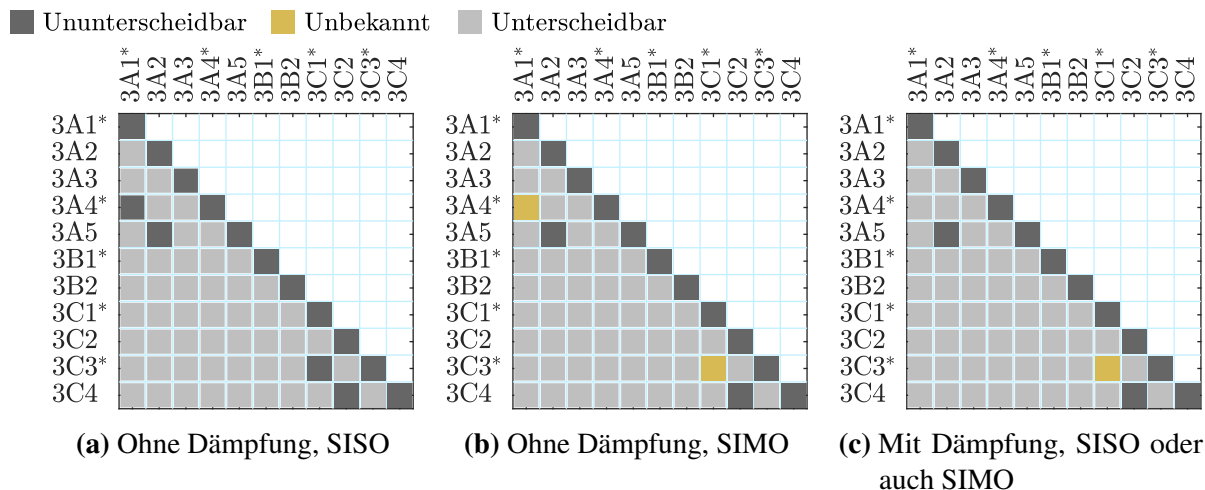


und der zusätzliche Sensor am Kraftangriffspunkt praktisch 3A1\* und 3A4\* unterscheiden müsste, was bekanntermaßen ebenfalls nicht möglich ist. Werden jedoch beide Sensoren gemeinsam ausgewertet, funktioniert die einfache Regel der Spiegelung und Transposition für den zusätzlichen Sensor nicht mehr und die Systeme werden unterscheidbar.



**Abbildung 4.10:** Ergebnis zu Frage I, Sensoren an beiden Kraftangriffspunkten, wenn es zwei gibt. Die Diagramme vereinen die Informationen aus LTA und MPA. Beim SIMO-Ansatz mit Dämpfung sind alle Systeme unterscheidbar.

Das **Ergebnis zu Frage II** ist in Abbildung 4.11 dargestellt. Es zeigt sich, dass sich die Unterscheidbarkeit auch dann verbessert, wenn der Sensorort nicht bekannt ist, allerdings weniger stark als bei Frage I.



**Abbildung 4.11:** Ergebnis zu Frage II, d.h. ein Zusatzsensor an unbekannter Position, LTA und MPA kombiniert.

Das **Ergebnis von Frage III** ist in Tabelle 4.5 angegeben, wobei kein Unterscheid zwischen dem gedämpften und ungedämpften Fall besteht. Für die elf zu untersuchenden Systeme ist durch

schwarze Kreuze angegeben, bei welcher Sensorposition die Masse aus den Messdaten bestimmt werden kann, auf der der zusätzliche Sensor montiert ist. Es ergibt sich, dass im SISO Fall 94 % der Zuordnungen eindeutig festgelegt werden können und im SIMO Fall sind es sogar 97 %. Zum Beispiel besteht bei 3A4\* Verwechslungsgefahr zwischen den Positionen 1 und 3, aber nicht 1 und 2 oder 2 und 3. Genauer ist zu erkennen, dass bei System 3A4\* die Sensorpositionen auf den Massen 1 und 3 nicht unterschieden werden können, während bei 3A5 dieses Problem durch die gemeinsame Verwendung beider Sensoren behoben werden kann. Der Grund dafür ist, dass die Systeme 3A4\* und 3A5 symmetrisch sind, mit Ausnahme der Messung des bekannten, primären Sensors in System 3A5. Bei letzterem System zeigt sich im SIMO-Fall ob das Signal des Zusatzsensors mit dem Signal des primären Sensors übereinstimmt. Daraus ergibt sich die richtige Masse.

**Tabelle 4.5:** Ergebnis zu Frage III, d. h. an den markierten Stellen (×) kann bei bekanntem Modell aus den Messdaten die Masse bestimmt werden, auf welcher der zusätzliche Sensor montiert ist. Mit und ohne Dämpfung ergibt sich das gleiche Ergebnis.

Masse	SISO			SIMO		
	1	2	3	1	2	3
3A1*	×	×	×	×	×	×
3A2	×	×	×	×	×	×
3A3	×	×	×	×	×	×
3A4*		×			×	
3A5		×		×	×	×
3B1*	×	×	×	×	×	×
3B2	×	×	×	×	×	×
3C1*	×	×	×	×	×	×
3C2	×	×	×	×	×	×
3C3*	×	×	×	×	×	×
3C4	×	×	×	×	×	×

Die Ergebnisse zeigen, dass je nach genauen Bedingungen alle oder fast alle Unsicherheiten über die Modellstruktur durch die Zusatzsensoren aufgehoben werden können. Das richtige Modell kann also bei der betrachteten Variantenvielfalt fast immer durch Maximierung der Ähnlichkeit zwischen Modell und Messung bestimmt werden, ohne dass es zu Mehrdeutigkeiten kommt. Auch kann in fast allen Fällen ein gegebenes Strukturelement mit Sensor einer Masse des bekannten Modells zugeordnet werden. Die wichtigste Prämisse sollte jedoch nicht außer Acht gelassen werden: Das zu untersuchende System muss mindestens einem der Kandidatenmodelle ähneln. Gründe, warum dies nicht der Fall sein könnte, sind Nichtlinearität, wie Reibung, Umkehrspiel und Hysterese, nicht modellierte Dynamik, elastische Biegemoden statt diskreter Massen oder Positionsabhängigkeiten. Für die Platzierung von Sensoren auf den verschiedenen Massen ist es wichtig, dass diese einer bestimmten Komponente des Systems zugeordnet werden können.

Auch wird die Situation komplizierter, wenn die Vielfalt der Modellstrukturen erweitert wird. Naheliegende Erweiterungen wären kombinierte rotatorische und translatorische Systeme oder Systeme mit Verzweigungen, wie z. B. Regalbediengeräte mit mehr als einer Führungsbahn. Es ist klar, dass die Menge der in Frage kommenden Modelle schnell so groß würde, sodass eine Vorauswahl auf Basis von Vorwissen notwendig wird. Die automatisierte Modellauswahl würde nur einen Schritt im gesamten Verfahren darstellen.

### 4.5.3 Experimentelle Versuche zur Struktur- und Parameteridentifikation mit Beschleunigungssensoren

Nach den kombinatorischen und theoretischen Untersuchungen wird nun eine praktische Validierung versucht, um den Nutzen der Zusatzsensorik für die Strukturidentifikation auch experimentell zu untersuchen. Damit die Strukturidentifikation mithilfe von Zusatzsensorik möglichst sinnvoll eingesetzt werden kann, wird vorab die Unterscheidbarkeit geprüft. Dieser Abschnitt basiert auf der Veröffentlichung [TPWb].

Der verwendete Prüfstand ist das RBG aus Abbildung 2.1, wobei der Fokus auf der  $x$ -Achse und der  $z$ -Achse liegt. Zusätzlich zur Seriensensorik, wie in Kapitel 2 beschrieben, werden funkbasierte, batteriebetriebene Beschleunigungs- und Drehratensensoren an verschiedenen Teilen des Aufbaus angebracht, wie in Abbildung 4.12 gezeigt. Die Funksensoren kombinieren das Arduino-Board ESP32 NodeMCU mit dem MEMS-Sensor LSM6DS3 von STMicroelectronics. Die äquidistant abgetasteten Daten werden asynchron über WLAN, TCP/IP an ein Empfangsmodul übertragen. Durch die Verwendung des Multitasking-Betriebssystems FreeRTOS ist es möglich, etwa sechs Sensoren gleichzeitig mit 833 Hz Abtastrate in drei Raumrichtungen zu erfassen<sup>4</sup>.

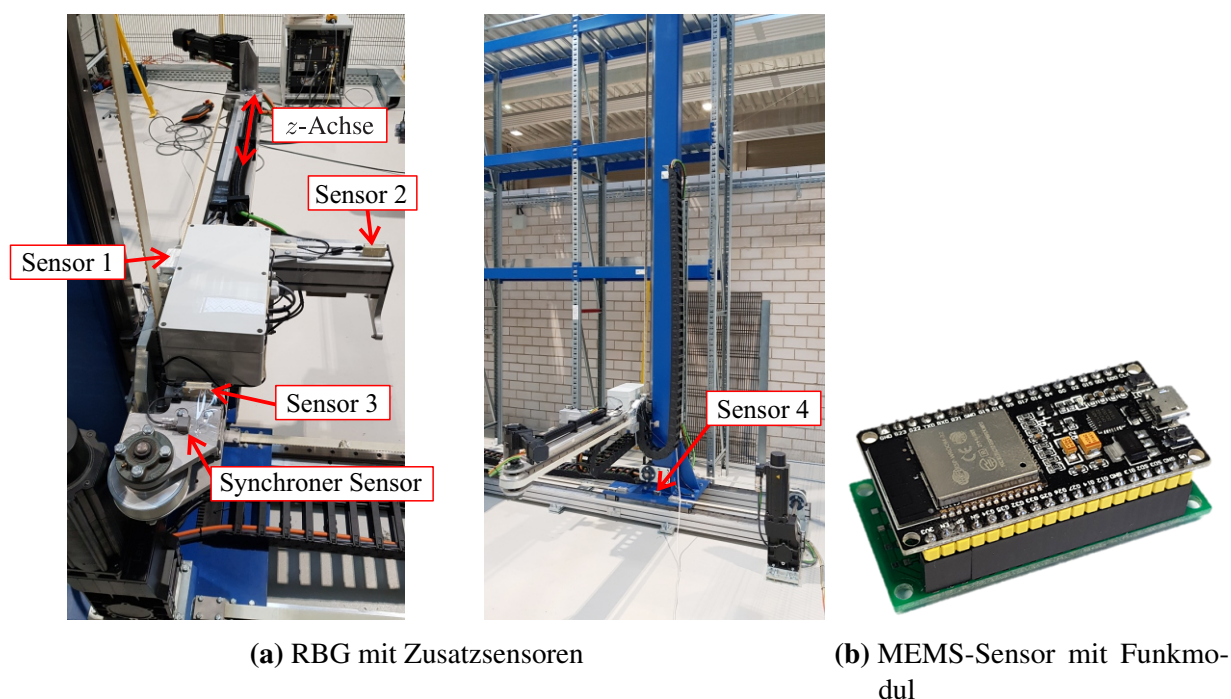
Zur Synchronisation der Signale mit den Motorsignalen wird der ebenfalls in Abbildung 4.12 beschriftete synchron abgetastete Beschleunigungssensor verwendet, dessen Daten zusammen mit den Motorsignalen über AD-Wandler mit 16 bit Auflösung der Firma Lenze gemessen werden. Die zeitliche Synchronisation wird erreicht, indem die Kreuzkorrelation zwischen dem synchron abgetasteten Sensor und dem Sensor 3 maximiert wird. Trotz dieser Synchronisation wird die Phaseninformation der funkbasierten Sensoren nicht verwendet, sondern ausschließlich die Amplitude.

### 4.5.4 Versuchsergebnisse

Die drei Fragestellungen aus Abschnitt 4.5.1 können herangezogen werden, wenn die Unterscheidbarkeit ohne Zusatzsensorik nicht gegeben ist. Es zeigt sich jedoch, dass sie hier nicht direkt anwendbar sind, weil der Aufbau des RBG nicht exakt den translatorischen Grundmodellen, siehe Tabelle 2.3, entspricht.

---

<sup>4</sup>Diese Abtastrate kommt dadurch zustande, dass der Sensor bestimmte Werte unterstützt und dieser Wert am dichtesten an den sonst verwendeten 1 kHz liegt.

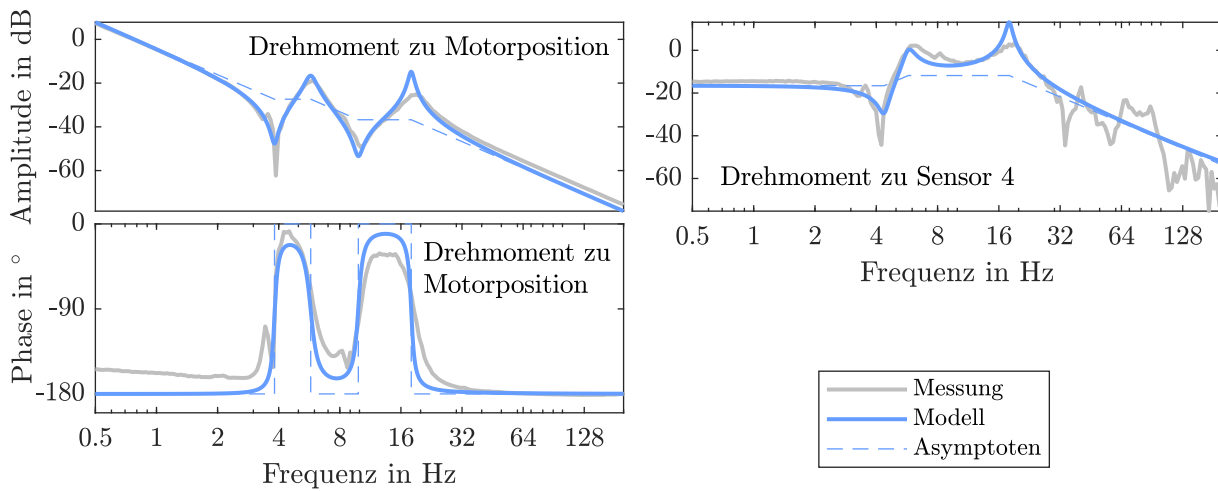


**Abbildung 4.12:** Bestückung des Regalbediengerätes mit Zusatzsensorik

Zuerst ist es das Ziel, für die  $x$ -Achse das korrekte Modell einer gegebenen Komplexität zu bestimmen. Aufgrund der deutlich ausgeprägten zwei Resonanzen und zwei Antiresonanzen werden ausschließlich die DMS-Modelle berücksichtigt.

Es ist bereits bekannt, dass die fünf kollozierten Modelle 3A1\*, 3A4\*, 3B1\*, 3C1\* und 3C3\* abgesehen von minimalen Unterschieden in der Dämpfung nicht unterscheidbar sind. Frage I ist nicht direkt anwendbar, denn an dem bewegten Kraftangriffspunkt des Aktors (Rotor des Motors) wäre die Anbringung eines Beschleunigungssensors nicht sinnvoll und ein Drehratensensor wäre aufgrund des Bauraums auch schwer unterzubringen.

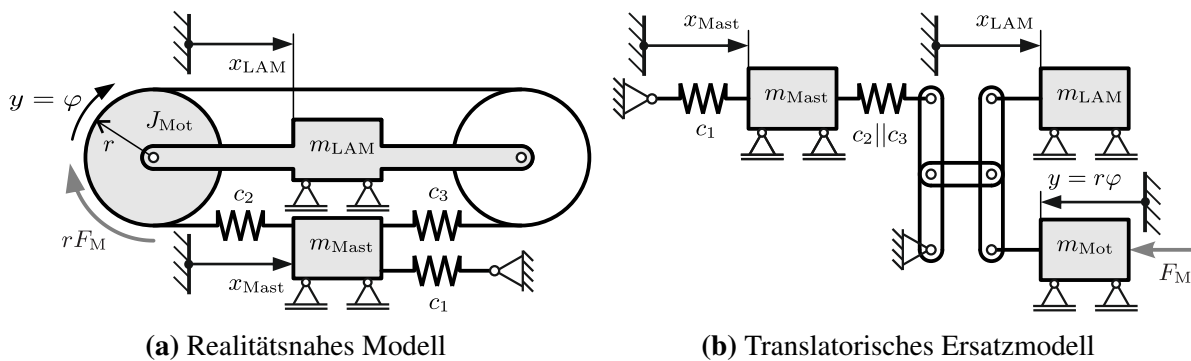
Frage II soll jedoch nachgegangen werden indem Sensor 4 am Mastfuß (Abbildung 4.12) zusätzlich mit ausgewertet wird. Durch diesen zusätzlichen Sensor mit unbekanntem Ort reduziert sich gemäß Abbildung 4.11 die Menge möglicher Modelle auf 3A1\* und 3A4\*. Unter Berücksichtigung von Dämpfung kommt nur noch 3A1\* in Frage. In Abbildung 4.13 ist die Messung zusammen mit dem besten Modell (3A1\* und Sensor 4 an Masse 2) dargestellt. Für das zweitbeste Modell (3A4\*) wäre das Residuum etwas höher (Der Wert nach (3.21) wäre 321 vs. 272). Der Zusatzsensor zeigt in diesem Fall also einen Nutzen und schränkt die Auswahl weiter ein. Wird darüber hinaus Modell 3A1\* als korrektes Modell vorausgesetzt, ergibt sich zusätzlich im Sinne von Frage III eindeutig, dass Sensor 4 auf der zweiten Masse montiert ist. Praktisch heißt dies, dass das DMS-Verhalten durch Riemen und Mastschwingung zusammen hervorgerufen wird und nicht etwa eines von beiden Strukturelementen als unendlich steif angenommen werden kann.



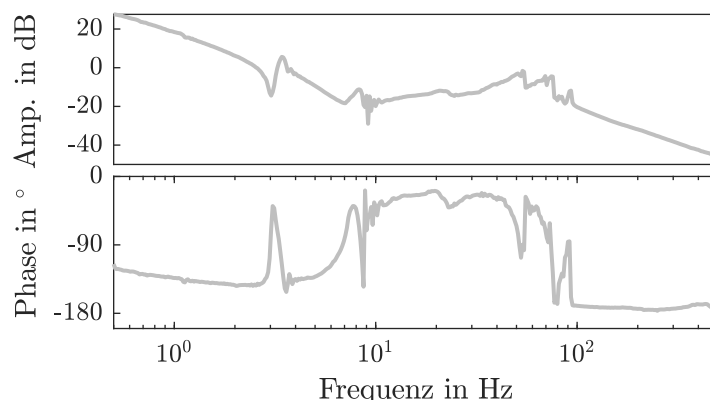
**Abbildung 4.13:** Gemessene Frequenzgänge für Motorposition und Zusatzsensor vs. resultierendes Modell 3A1\* für die  $x$ -Achse des RBG

Für die Lokalisierung der dritten Masse werden die Amplitudengänge der Sensoren 1, 2 und 3 in Abbildung 4.12 ausgewertet. Doch es ergibt sich bei keinem Sensor eine gute Übereinstimmung mit dem erwarteten Amplitudengang der dritten Masse. Die Zuordnung zwischen Massen und Bauteilen ist also nur für die erste Masse (Rotor des Motors) und die zweite Masse (Mastfuß) möglich. Die dritte Masse kann aufgrund der Komplexität des Systems nicht direkt einem Element der Struktur zugeordnet werden.

Als nächstes wird die  $z$ -Achse untersucht, für die ein mögliches Modell in Abbildung 4.14(a) gezeigt ist. Federsteifigkeit  $c_1$  repräsentiert den Mast, die anderen Federsteifigkeiten den umlaufenden Riemen der Achse. Der gemessene Frequenzgang ist in Abbildung 4.15 gezeigt. Aufgrund der Komplexität und des rotatorischen Aktors sind die Standard-Mehrmassenschwingermodelle nicht direkt übertragbar. Auch das rein translatorische Ersatzmodell in Abbildung 4.14(b) ist komplex.

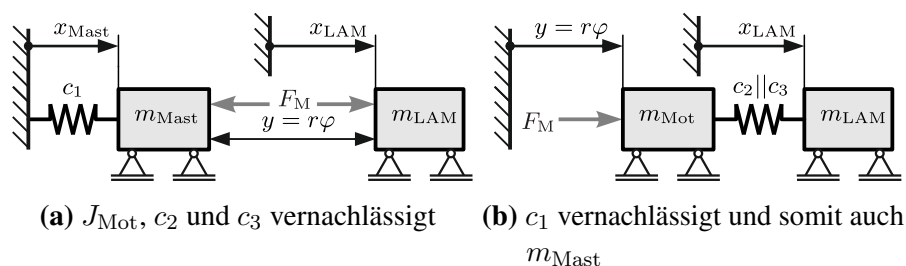


**Abbildung 4.14:** Modell der  $z$ -Achse.  $c_2 || c_3$  steht für die Parallelschaltung der Federn.



**Abbildung 4.15:** Gemessener Frequenzgang von Drehmoment zu Motorposition für die  $z$ -Achse

Für die weitere Analyse wird das Modell aus Abbildung 4.14(b) daher auf zwei alternative ZMS-Modelle reduziert, wie in Abbildung 4.16 dargestellt. Im ersten Fall werden die Grenzübergänge  $c_2 \rightarrow \infty$ ,  $c_3 \rightarrow \infty$  und  $J_{\text{Mot}} \rightarrow 0$  gebildet, während im zweiten Fall vereinfachend  $c_1 \rightarrow \infty$  gesetzt wird und damit  $m_{\text{Mast}}$  vernachlässigt wird. Es entstehen die beiden aus Tabelle 2.2 bekannten ZMS-Modelle 2A1\* und 2B1\*. Mit Seriensensorik wären sie nicht unterscheidbar, aber mit einem zusätzlichen Sensor mit unbekannter Position kann eine Strukturidentifikation für die drei ZMS-Modelle aus Tabelle 2.2 durchgeführt werden. Dies entspricht der Frage II.

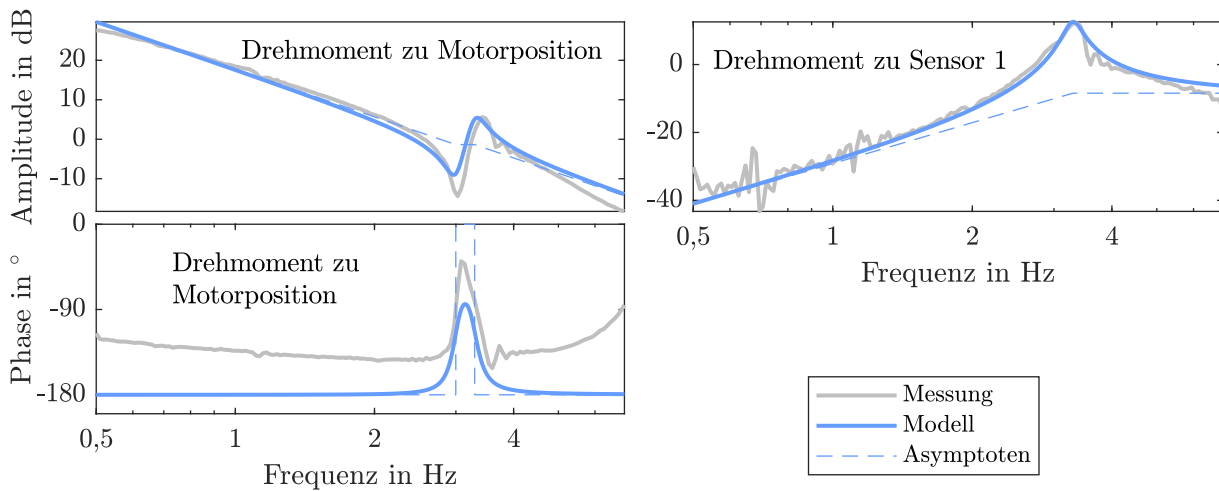


**Abbildung 4.16:** Zwei mögliche Modellvereinfachungen

Für die praktische Durchführung der Strukturidentifikation wird Sensor 1 verwendet, dessen Befestigungsort den Fußpunkt der  $z$ -Achse darstellt, sodass er sich nicht mit dem Lastaufnahmemittel ins Regal hinein bewegt. Sein gemessener Frequenzgang ist in Abbildung 4.17 dargestellt. Ziel ist es zu bestimmen, welches der zwei möglichen ZMS-Modelle das niederfrequente Antiresonanz-Resonanz-Verhalten richtig erklärt. Der Frequenzgang wird nur in dem Bereich verwendet, der für die betrachteten ZMS-Modelle relevant ist, also etwa bis 7 Hz. Bei höheren Frequenzen würden sich weitere Dynamiken bemerkbar machen, die nicht durch ein ZMS-Modell zu erklären sind, insb. die Transversalschwingung des Riemens und Lose in der Klauenkupplung.

Das Residuum wird gemäß Kostenfunktion (3.21) über beide Sensoren, also den Resolver im Motor und den Zusatzsensor 1, für alle drei ZMS-Modelle minimiert. Zusätzlich müssen die beiden

Massen als potentielle Positionen des Beschleunigungsaufnehmers berücksichtigt werden, weil die Annahme getroffen wurde, dass die Sensorposition nicht vorab bekannt ist.



**Abbildung 4.17:** Gemessene Frequenzgänge vs. resultierendes Modell 2B1\* für die  $z$ -Achse

Die resultierenden Residuen der insgesamt sechs Modelle mit den zwei möglichen Positionen von Sensor 1 sind in Tabelle 4.6 gezeigt. Erwartungsgemäß ergibt sich bei dem nichtkollokierten Modell 2A2 das höchste Residuum. Interessant ist, dass Modell 2B1\* in Kombination mit Messposition 1 bei weitem die beste Übereinstimmung aufweist. Der modellbasierte Frequenzgang für diesen Fall ist ebenfalls in Abbildung 4.17 gezeigt. Es hat sich also durch die Untersuchungen herausgestellt, dass die  $z$ -Achse in der ZMS-Näherung als elastische Basis beschrieben werden kann, während sich der Riemen erst bei höheren Frequenzen im Frequenzgang abzeichnet.

**Tabelle 4.6:** Residuen der drei ZMS-Modelle für die zwei möglichen Positionen des Beschleunigungssensors

Messposition	2A1*	2A2	2B1*
1	1.528	4.756	<b>145</b>
2	1.563	12.342	1.456

## 4.6 Fazit

In diesem Kapitel wurde die Unterscheidbarkeit von Mehrmassenschwinger-Modellen untersucht, wie sie sich aus der Berücksichtigung von Elastizitäten und konzentrierten Massen in elektrischen Antriebssträngen ergeben. Zuerst wurde der naheliegenden aber bisher noch nicht in Gänze untersuchten Fragestellung nachgegangen, ob sich die DMS-Modelle aus Kapitel 2 anhand der Abfolge der Resonanzen und Antiresonanzen im Frequenzgang eindeutig bestimmen lassen. Diese

Abfolgen konnten für alle Modelle hergeleitet werden. Es hat sich gezeigt, dass so tatsächlich die Unterscheidbarkeit weitgehend beurteilt werden kann, aber es werden nicht alle relevanten Informationen berücksichtigt.

Der verbreitetere Ansatz ist die Überprüfung von Abhängigkeiten zwischen den Strukturinvarianten der Systeme. Die strukturelle Untersuchung berücksichtigt keine Parametergrenzen und keine speziellen Parametrierungen, lässt sich aber flexibler auf fast beliebige ÜTF-Modelle anwenden.

Weil nicht in jedem Fall eine Aussage über die Unterscheidbarkeit gemacht werden kann, ist es naheliegend, verschiedene Formen der Strukturinvarianten und verschiedene Ausschlusskriterien zu untersuchen. Es wurde gezeigt, dass die bisher selten betrachteten Markov-Parameter in bestimmten Situationen Vorteile gegenüber den zumeist genutzten Koeffizienten der ÜTF bieten. Auch die Vorgehensweise, die Ausdrücke nach Tausch und Umbenennung der Parameter zu vergleichen, konnte in einigen Fällen eine Entscheidung herbeiführen.

Zu den elf Grundmodellen des Dreimassenschwingers ist festzuhalten, dass es Mehrdeutigkeiten bei der Erkennung des richtigen Modells gibt und insbesondere die kollokierten Modelle sind nicht unterscheidbar bzw. mit Dämpfung ist der Unterschied nur gering. Dies motiviert die Verwendung von temporärer Zusatzsensorik für die Inbetriebnahme, deren Nutzen hier erstmals systematisch untersucht wurde.

Die Zusatzsensoren können das Problem der Ununterscheidbarkeit in vielen Fällen lösen, insbesondere wenn sie gezielt auf die Kraftangriffspunkte gesetzt werden, aber auch wenn sie an beliebigen, unbekanntem Positionen entlang der Struktur angebracht sind. Es ist in fast allen Fällen möglich, die Position eines Sensors aus seinen Messsignalen zu bestimmen, was die Zuordnung von Teilen der Anlage zu Massen des Mehrmassenschwingers erlaubt. Häufig entsteht der Nutzen erst durch die gleichzeitige Auswertung mehrerer Sensoren, was eine Anleitung zu Versuchen mit mehreren Bewegungsaufnehmern an der Struktur darstellt. Die einfache Umsetzbarkeit solcher Messungen wurde gezeigt. In jedem Fall muss ein gewisses Vorwissen vorausgesetzt werden damit ein Nutzen entsteht, was sich auch bei der experimentellen Validierung der Strukturidentifikation mit Zusatzsensorik gezeigt hat.



## 5 Regelungstechnisch relevante Identifikation und Modellstrukturoptimierung

Während in den vorherigen Kapiteln die Strukturidentifikation weitgehend unabhängig von der gewünschten Anwendung des Modells durchgeführt wurde, geht es in diesem Kapitel speziell um die Reglerauslegung als Anwendung. Die Modelle sollen *regelungstechnisch relevant*, engl. *control-oriented*, *control-relevant* bestimmt werden [VS94; Cod05], inklusive der Modellkomplexität. Es ist anzunehmen, dass die übliche Minimierung des quadratischen Fehlers diese Frage nicht zufriedenstellend beantwortet, weil regelungstechnisch verwendete Modelle oft sehr ungenau und einfach sind [Van97; HVB+21] und beispielsweise nur ein oder zwei Parameter enthalten. Speziell auf die Modellkomplexität wird in Abschnitt 5.1 im Sinne einer Motivation eingegangen.

Bei vorgegebener Komplexität stellt sich die Frage, an welchen Stellen, z. B. bei welchen Frequenzen, das Modell am genauesten sein muss. Eine theoretische Antwort darauf wird in Abschnitt 5.2 vorgestellt, bevor in Abschnitt 5.3.1 praktisch anwendbare Verfahren abgeleitet und im Detail erklärt werden. Abschnitt 5.4 dokumentiert Versuche zur Validierung und zum Vergleich dieser Methoden.

### 5.1 Einfluss der Modellkomplexität auf die Reglerauslegung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, welchen Einfluss die Modellkomplexität auf eine modellbasierte Reglerauslegung hat. Dazu betrachtet Abschnitt 5.1.1 den Fall, dass der Regler eine einfache, konventionelle Struktur aufweist, während Abschnitt 5.1.2 Ergebnisse zu Reglern höherer Ordnung zeigt.

#### 5.1.1 Vergleich einfacher, modellbasierter Regler durch nichtparametrisches Modell

Eine naheliegende Idee zur Bestimmung eines regelungstechnisch optimalen Modells ist die Auslegung mehrerer modellbasierter Regler und die Bewertung dieser bzgl. festgelegter Bewertungskriterien. Das Regelgesetz mit der besten Performance definiert das zugrundeliegende Modell als das beste Modell. Das Vorgehen lässt sich in vier Schritten darstellen:

1. Parameteridentifikation für eine Reihe von physikalisch motivierten Modellkandidaten auf der Grundlage einer Messung des Systems

2. Auslegung mindestens eines Reglers für jeden Modellkandidaten gemäß allgemein bekannter Regeln auf Basis der enthaltenen physikalischen Effekte
3. Verifikation aller Regler über nichtparametrische, komplexe black-box Modelle. Diese sind dem realen System ähnlicher als alle Modellkandidaten und dienen so als Ersatz für aufwendige Prüfstandsversuche mit unbestimmtem Ergebnis. Das getestete Modell, das zu dem Regler mit der besten Performance gehört, wird als das beste bezeichnet.
4. Hardware-Tests der resultierenden Reglereinstellungen.

In der Veröffentlichung [TJZJa] wurde dieses Vorgehen für PI-Regler und eine begrenzte Menge potentieller Modelle umgesetzt. Die Ergebnisse sollen hier nicht im Detail wiederholt werden, aber die Erkenntnisse werden kurz zusammengefasst. Die Methode ist ein Versuch, das übliche Vorgehen bei der manuellen Festlegung eines geeigneten Modells zu formalisieren. Sie nutzt das Wissen, das über die Regelung von Mehrmassenschwingern usw. schon vorliegt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die verschiedenen Modelle zu sehr ähnlichen Reglereinstellungen führen. Ein besonders genaues Modell ist also nicht so wichtig, solange ein geeigneter Regler gefunden wird. Dadurch ist der Aufwand des Verfahrens schwer zu rechtfertigen. Der Grund für den geringen Nutzen einer hohen Modellkomplexität hängt mit der einfachen Struktur der ausschließlich verwendeten PI-Regler zusammen. Sie können das gewonnene, komplexe Systemwissen nicht vollständig nutzen und sind deshalb wenig empfindlich gegenüber Detailverbesserungen des Modells. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt der Einfluss der Modellkomplexität auf Regler höherer Ordnung untersucht.

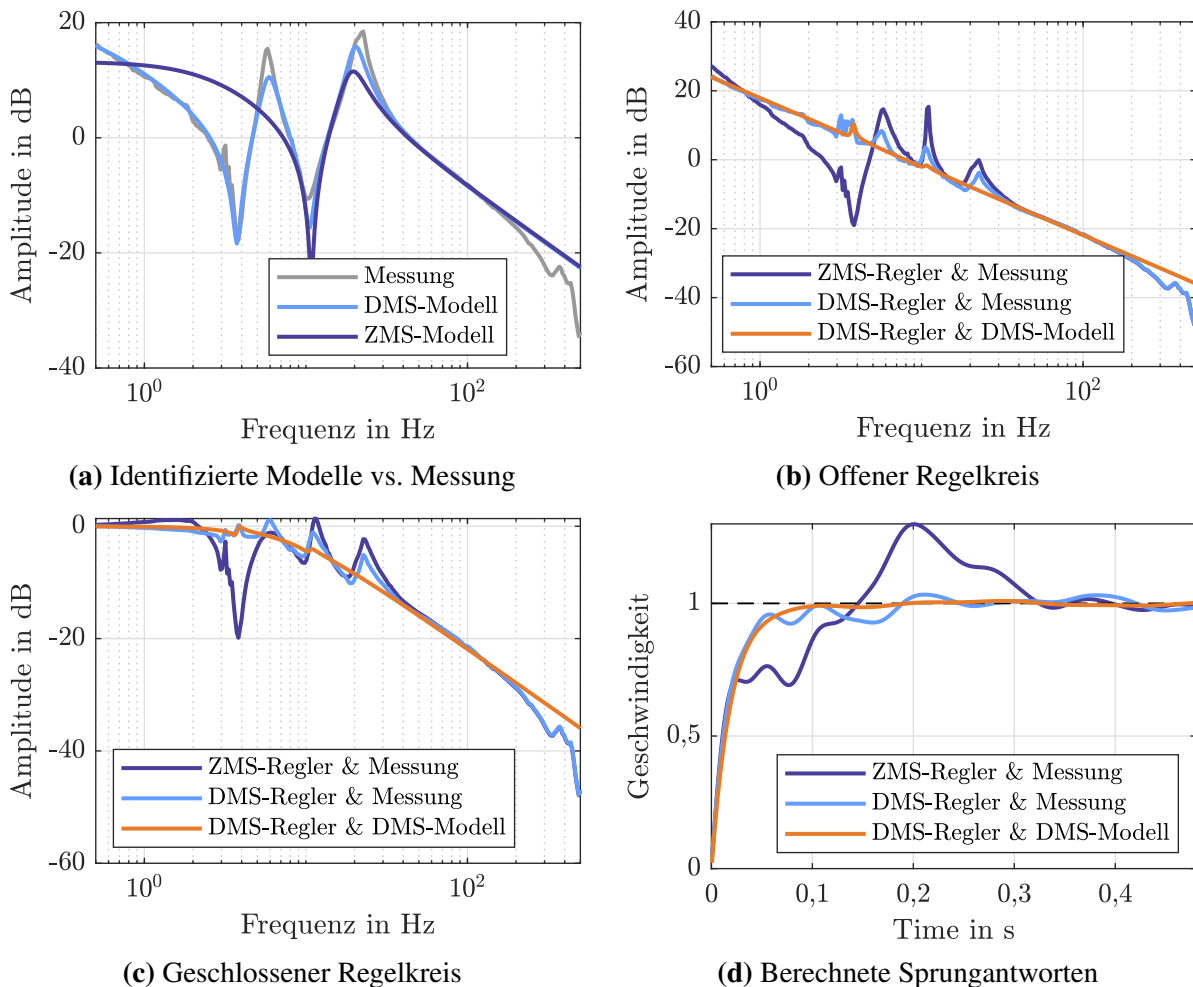
### 5.1.2 Regler höherer Ordnung

Um eine starke Abhängigkeit der Reglerperformance von der Modellgenauigkeit zu provozieren, werden Regler höherer Ordnung mit Hilfe der  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimierung ausgelegt, wie im Folgenden beschrieben. Als Grundlage dienen verschiedene am gemessenen Frequenzgang des RBG identifizierte Modelle, siehe Abbildung 5.1(a). Dann wird mit der Matlab Funktion `hinfsyn` der Regler  $C$  bestimmt, der die Norm  $\|(1 + PC)^{-1}W_1\|_\infty$  minimiert<sup>1</sup> mit dem aktuell betrachteten Modell  $P$ . Das Filter  $W_1 = (s + 300\pi)/(s + 0,3\pi)$  dient der Formgebung der Sensitivitätsfunktion, siehe beispielsweise [AM19]. In den Abbildungen 5.1(b) und 5.1(c) ist der resultierende offene bzw. geschlossene Regelkreis basierend auf dem ausgelegten Regler und dem zugrundeliegenden Modell dargestellt (orange). Im gezeigten Fall ist es das DMS-Modell, aber für das ZMS-Modell ist das Ergebnis sehr ähnlich: Die Resonanzen und Antiresonanzen sind fast nicht mehr zu sehen.

Nun wird allerdings der modellbasiert generierte Regler in Kombination mit dem gemessenen Frequenzgang verwendet (andere Linien in den Abbildungen 5.1(b) und 5.1(c)). Es zeigt sich ein deutlicher Unterschied in der Form dass bei dem komplexeren Modell (DMS) der ideale,

<sup>1</sup>Um ein praktisch anwendbares Regelgesetz zu erhalten, wird empfohlen, weitere Kriterien mit einzubeziehen, z. B. eine zusätzliche Gewichtung der Stellgrößen [MM96], S. 163.

orangene Frequenzgang genauer getroffen wird. Bei dem einfacheren Modell (ZMS) sind stärkere Abweichungen zu sehen.



**Abbildung 5.1:** Vergleich zweier Regler basierend auf ZMS- bzw. DMS-Modellen evaluiert am gemessenen Frequenzgang bzw. am idealen ZMS- bzw. DMS-Modell

Relevant für die Bewertung der regelungstechnischen Modellgüte ist auch die Frage, welchen Einfluss die Abweichung auf die Sprungantwort hat. Dazu wurden Sprungantworten aus Frequenzbereichsdaten berechnet. Das Verfahren basiert auf der Fourierreihe und ist in [TJZJa] beschrieben. Hier wurde allerdings der Umweg über den geschlossenen Regelkreis weggelassen und nur die Messung aus Abbildung 5.1(a) verwendet.

Die berechneten Sprungantworten sind in Abb. 5.1(d) dargestellt. In orange ist die Sprungantwort gezeigt, die sich für das DMS-Modell und den zugehörigen Regler ergeben würde (für das ZMS-Modell sähe es sehr ähnlich aus). Zusätzlich sind die Sprungantworten gezeigt, wie sie sich aus dem Frequenzgang des ZMS- bzw. DMS-Reglers und dem gemessenen Frequenzgang des Prüfstands ergeben. Offensichtlich sind letztere Sprungantworten aufgrund der Modellabweichung schlechter. Der DMS-basierte Regler führt allerdings noch zu einer akzeptablen Sprungantwort. Hier hat also

tatsächlich der Regler, der auf dem komplexeren Modell basiert, weitaus bessere Eigenschaften. Das gleiche Ergebnis zeigt sich auch für den Linearachsprüfstand (hier nicht gezeigt).

Der Grund für die starke Abhängigkeit von der Modellgüte ist, dass mit diesem Reglerentwurf eine Kompensation der Systemeigenschaften herbeigeführt wird. Die Genauigkeit des Modells entscheidet beim Reglerentwurf darüber, ob die Kompensation gut ist, ob einzelne Resonanzen und Antiresonanzen bleiben, oder ob sie im schlimmsten Fall noch verstärkt werden. Der PI-Regler reagiert dagegen gutmütiger auf Modellfehler, weil er nicht so spezifisch an das Modell angepasst ist.

## 5.2 Grundlagen zur regelungstechnisch relevanten Identifikation

Nach diesem Beispiel, das die Wichtigkeit der Modellgüte bei komplexen Reglern zeigt, ist es nun das Ziel, ein theoretisch fundiertes Abstandsmaß für die Identifikation und Modellauswahl zu finden, das eine anschließende Reglerauslegung begünstigt.

Zuerst wird das Reglerauslegungsziel definiert (Abschnitt 5.2.1), um davon Kriterien für die Modellauswahl abzuleiten (Abschnitte 5.2.2 und 5.2.3).

### 5.2.1 Reglerauslegungsziel und abgeleitete Identifikationskriterien

Es wird der Regelkreis aus Abbildung 5.2 betrachtet, wobei die innere Struktur des Systems  $P_0$  zunächst unerheblich ist. Als Reglerauslegungsziel wird aus der robusten Regelungstechnik

$$C_{\text{opt}} = \arg \min_C \underbrace{\|W_{uy}T(P_0, C)V\|_{\infty}}_{\mathcal{J}(C)} \quad (5.1)$$

übernommen mit

$$T(P_0, C) = \begin{bmatrix} P_0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{I} + CP_0)^{-1} \begin{bmatrix} C & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = T(P_0, C) \begin{bmatrix} \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Alle Größen sind frequenzabhängig, aber aus Gründen der Kompaktheit deutet die Notation dies nicht explizit an. Die  $\mathcal{H}_{\infty}$ -Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$  ist als unendlich definiert, wenn das Argument eine instabile ÜTF ist und ansonsten als der größte Singulärwert (Maximum über alle Singulärwerte) maximiert über alle Frequenzen [ZDG96]. Mit den Gewichten  $W_{uy} = \text{diag}(W_y, W_u)$ ,  $V = \text{diag}(V_2, V_1)$ ,  $W_{uy}, W_{uy}^{-1}, V, V^{-1} \in \mathcal{RH}_{\infty}$  kann das genaue Ziel spezifiziert werden<sup>2</sup>. Z. B. können die vier einzelnen Übertragungsfunktionen unterschiedlich stark gewichtet werden, oder es

<sup>2</sup>Die Abkürzung  $\in \mathcal{RH}_{\infty}$  gibt an, dass es sich um stabile und rationale Übertragungsfunktionen mit reellen Koeffizienten [SP05] handelt.

können frequenzabhängige Gewichte vorgegeben werden, um den Regelkreis im Frequenzbereich zu „formen“ [SP05; WvSB05].

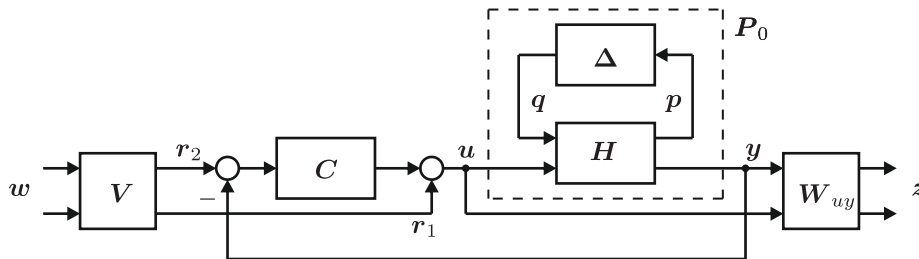


Abbildung 5.2: Visualisierung der ÜTF  $W_{uy}T(P_2, C)V$  nach [OvQ+13]

Etwas restriktiver ist die Minimierung von  $\|T(P'_0, C')\|_\infty$ , ohne  $W_{uy}$  und  $V$ . Dabei wird nur eine Eingangs- und Ausgangsgewichtung berücksichtigt:  $P'_0 = W_o P_0 W_i$  mit  $W_o, W_i \in \mathcal{RH}_\infty$ . Der resultierende Regler  $C'$  wird über  $C = W_i C' W_o$  wieder in physikalische Koordinaten umgerechnet. Die Umrechnung der Gewichte in die des zuerst angegebenen, allgemeineren Zielkriteriums lautet  $W_y = W_o$ ,  $W_u = W_i^{-1}$ ,  $V_2 = W_o^{-1}$  und  $V_1 = W_i$ . Später wird noch ein Beispiel für eine solche Reglerauslegung gegeben.

Anstelle (5.1) direkt zu minimieren, wird üblicherweise erst ein Modell  $\hat{P}$  identifiziert und dann eine modellbasierte Reglerauslegung durchgeführt [Cod05; OvQ+13; Mah20; TO23]. Bei der Identifikation und Modellauswahl sollte das Modell so optimiert werden, dass es dem Regler gute Eigenschaften am realen System verleiht, nicht nur am Modell. Dies macht die regelungstechnische Relevanz aus. Das genaue Ziel könnte beispielsweise sein,

1. die Performance, gemessen wie in (5.1), zu optimieren,
2. die Performanceverschlechterung bei Anwendung des modellbasierten Reglers auf das reale System zu minimieren [Cod05; Gev04],
3. oder die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises (Modell vs. Messung) bei gleichem Regler zu maximieren [Vin01].

Durch Ausnutzung der Dreiecksungleichung der  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm ergibt sich ein erster Ansatz [OvB09]:

$$\|W_{uy}T(P_0, C)V\|_\infty \leq \underbrace{\|W_{uy}T(\hat{P}, C)V\|_\infty}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\|W_{uy}(T(P_0, C) - T(\hat{P}, C))V\|_\infty}_{\textcircled{2}}. \quad (5.3)$$

Die Performanceverschlechterung ist also begrenzt durch die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm  $\textcircled{2}$ , sodass es sich anbietet, diese bei der Identifikation zu minimieren, mit  $C = C_{\text{opt}}$ . Allerdings ist der Ausdruck von  $C_{\text{opt}}$  abhängig, sodass der optimale Regler schon vor der Identifikation recht genau feststehen müsste [vOvB10].

Ein anderer Ansatz ist es, die Normen  $\textcircled{1}$  und  $\textcircled{2}$  in (5.3) im Wechsel zu minimieren, wobei im Fall von  $\textcircled{2}$   $\hat{P}$  variiert wird, im Fall von  $\textcircled{1}$  dagegen  $C$ . Für eine bessere Konvergenz können Tole-

ranzschläuche / Unsicherheiten berücksichtigt werden, die die Messung vollständig einschließen und eine *worst-case* Reglerauslegung ermöglichen [DV97]. Dies wird in Abschnitt 5.3.2 genauer beschrieben.

Weiterhin gibt es Methoden zur Identifikation eines komplexen Modells und  $\mathcal{H}_\infty$ -Reglerauslegung mit anschließender Ordnungsreduktion. Durch die Kenntnis des genauen Modells und des zugehörigen Reglers können Abstandsmaße im geschlossenen Regelkreis ausgewertet werden, was zu regelungstechnischer Relevanz der Ordnungsreduktion führt [Cod05]. Da dies jedoch nicht dem Prinzip der Modellauswahl entspricht, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Schließlich besteht die Möglichkeit, das Problem des unbekanntes  $C_{\text{opt}}$  durch Minimierung eines Abstandsmaßes zwischen Modell und Messung zu umgehen, das den Regler nicht explizit berücksichtigt, sondern eine *worst-case* Betrachtung über alle möglichen Regler durchführt. Dies wird im Folgenden kurz beschrieben.

### 5.2.2 Allgemeines Abstandsmaß und Stabilitätsreserve

Im Folgenden wird eine Klasse von Abstandsmaßen beschrieben, die eine Abstandsbestimmung zwischen zwei Modellen oder teilweise auch zwischen gemessenen Frequenzgängen oder Zeitbereichsdaten ermöglichen. Die Abstandsmaße berücksichtigen keine Gewichte  $W_{uy}$  und  $V$ , sodass sich der Rückführkreis aus Abbildung 5.2 zu Abbildung 5.3 vereinfacht. Gewichte müssen, wie in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, in  $P$  und  $C$  integriert sein.

Der Regelkreis in Abbildung 5.3 beinhaltet ein gestörtes System  $P_2 \in \mathcal{R}$ , das sich gemäß  $H \in \mathcal{R}$  und  $\Delta \in \mathcal{RL}_\infty$  aus dem ungestörten System  $P_1 \in \mathcal{R}$  ergibt<sup>3</sup>:

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \quad H_{22} = P_1 \in \mathcal{R}^{p \times q}. \quad (5.4)$$

Ursprünglich ist damit die Frage verbunden, ob der Regler, der für das ungestörte System entworfen wurde, auch für das gestörte System geeignet ist. Im Kontext der Identifikation wird  $P_1$  mit dem Modell assoziiert und  $P_2$  mit dem realen System.

Die Einträge  $H_{11}$ ,  $H_{12}$  und  $H_{21}$  werden weiter unten für ein bestimmtes Abstandsmaß definiert. Der Abstand ist nun die  $\mathcal{L}_\infty$ -Norm  $\|\Delta\|_\infty$ , nachdem die Störung  $\Delta$  so bestimmt wurde, dass  $P_1$  in  $P_2$  übergeht<sup>4</sup> [LP09]. Ein einfaches Beispiel ist die additive Unsicherheit:  $P_2 = P_1 + \Delta$  [Vin01].

<sup>3</sup>Die Angabe  $\mathcal{L}_\infty$  bedeutet, dass die rationale ÜTF keine Pole auf der imaginären Achse haben darf und dass Zählergrad kleiner gleich Nennergrad sein muss. Im Gegensatz zu  $\mathcal{H}_\infty$  sind aber instabile Übertragungsfunktionen zugelassen [LP09].

<sup>4</sup>Es können noch weitere Bedingungen für  $\Delta$  gefordert werden wie Stabilität. Wenn sich kein passendes  $\Delta$  finden lässt, ist der Abstand als maximal groß, z. B. unendlich definiert [LP09].

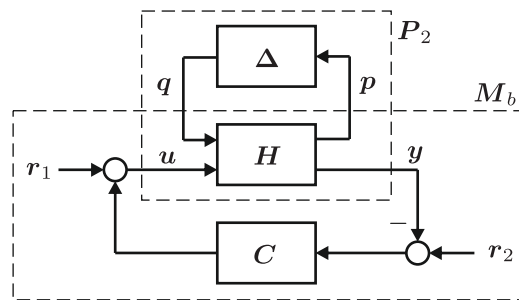


Abbildung 5.3: Zugrundeliegender Rückführkreis aus Regler und gestörtem System

Die Relevanz der Größe  $\|\Delta\|_\infty$  lässt sich z. B. durch Betrachtung der Stabilität des Regelkreises mit gestörtem System bei gegebener Stabilität mit ungestörtem System zeigen (robuste Stabilität [Cod05]), wie aus [Vin01], Lemma 1.22 hervorgeht: Wenn die drei Bedingungen

1.  $[P_1, C]$  stabil, (d. h. der Regelkreis aus  $P_1$  und  $C$  ist stabil),
2.  $\|\Delta \cdot M_b\|_\infty < 1$ ,
3.  $(I - H_{11}\Delta)$  invertierbar

erfüllt sind, dann gelten die zwei alternativen Bedingungen

$$\Delta \in \mathcal{H}_\infty \Rightarrow [P_2, C] \text{ stabil}, \quad (5.5)$$

$$\eta(P_2) = \eta(P_1) + \text{wno}[\det(I - H_{11}\Delta)] \Leftrightarrow [P_2, C] \text{ stabil}. \quad (5.6)$$

Dabei steht  $\eta(P_i)$  für die Anzahl der Pole in der offenen, rechten s-HE des zeitkontinuierlichen Modells und wno ist die Windungszahl. Dies ist die Zunahme der Phase des Arguments wenn  $s$  der Nyquist D-Kontur gegen den Urzeigersinn folgt, welche bei Polen von  $P_1$  und  $P_2$  auf der imaginären Achse kleine Umwege durch die rechte s-HE macht.  $\mathcal{H}_\infty$  ist der Raum der stabilen ÜTFen.

Der Zusammenhang zum Abstandsmaß  $\|\Delta\|_\infty$  kommt durch die Ungleichung  $\|\Delta \cdot M_b\|_\infty \leq \|\Delta\|_\infty \cdot \|M_b\|_\infty$  zustande: Damit Bedingung 2 erfüllt ist, sollte sowohl  $\|\Delta\|_\infty$  klein sein (mögliches Ziel der Identifikation) als auch  $\|M_b\|_\infty$  (mögliches Ziel der Reglerauslegung).

Die Bestimmung von  $\Delta$  ist bei manchen Formulierungen von  $H$  nicht eindeutig. Dies führt dazu, dass vor der Berechnung von  $\|\Delta\|_\infty$  über alle  $\Delta$  minimiert wird, um möglichst Bedingung 2 erfüllen zu können, während die anderen Bedingungen als Nebenbedingungen berücksichtigt werden [Vin01]. In [LP09] ist eine mathematisch genaue Formulierung angegeben. Die Minimierung muss, zumindest im Fall der  $\nu$ -gap metric, siehe unten, nicht wirklich mit einem Suchalgorithmus durchgeführt werden, sondern es existieren geschlossene Berechnungsvorschriften [ZD98].

Das genaue Maximierungskriterium für die Reglerauslegung, das alle Eventualitäten berücksichtigt, lautet [LP09]:

$$b^H(\mathbf{P}_1, \mathbf{C}) = \begin{cases} \|M_b\|_\infty^{-1} & \text{für } [\mathbf{P}_1, \mathbf{C}] \text{ stabil und } \mathbf{0} \neq M_b \in \mathcal{RL}_\infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.7)$$

Als Zwischenergebnis ist festzuhalten, wenn

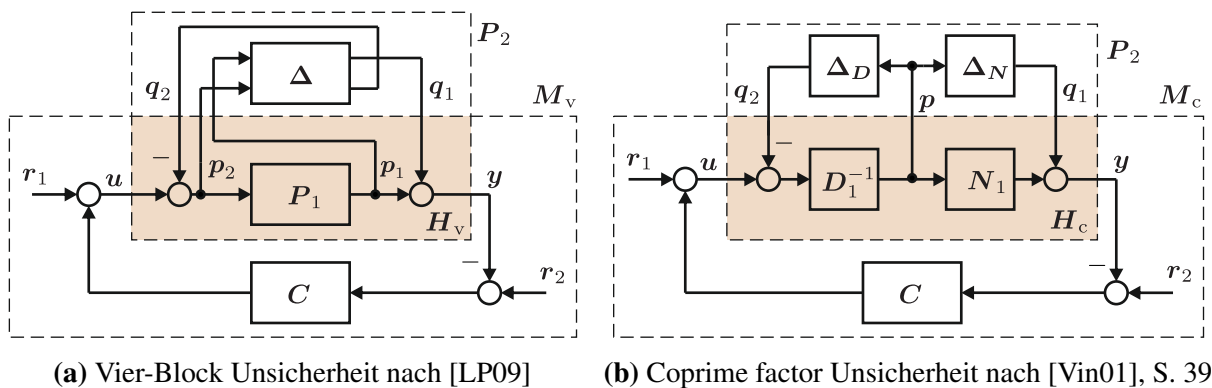
$$b^H(\mathbf{P}_1, \mathbf{C}) > \|\Delta\|_\infty, \quad (5.8)$$

dann sind Bedingungen 1 und 2 erfüllt.

### 5.2.3 Spezialisierung auf vier-Block Unsicherheit oder coprime factor Unsicherheit

Eine Spezialisierung auf ein konkretes Abstandsmaß erfolgt, indem  $\mathbf{H}_{11}$ ,  $\mathbf{H}_{12}$  und  $\mathbf{H}_{21}$  und somit die Form der Unsicherheit festgelegt werden. Während beliebige Definitionen möglich wären, sind nicht alle sinnvoll. Zum Beispiel würde die additive Unsicherheit in Verbindung mit der Bedingung (5.5) dazu führen, dass das Abstandsmaß nicht angebar oder unendlich wäre, sobald sich die Systeme in den instabilen Polen unterscheiden. Schließlich darf  $\Delta$  nicht instabil sein [Vin01].

Um regelungstechnische Relevanz zu erreichen, wird  $\mathbf{H}$  so gewählt, dass das Reglerauslegungskriterium  $b^H(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})$  (5.7) mit dem anfänglich festgelegten Reglerauslegungsziels (5.1) übereinstimmt. Dadurch ergibt sich wahlweise die *vier-Block Unsicherheit* (Abbildung 5.4(a)) oder die *normierte coprime factor Unsicherheit*<sup>5</sup> (Abbildung 5.4(b)).



**Abbildung 5.4:** Beispielhafte Unsicherheitsformen.  $P_2$  und  $M_c$  bzw.  $M_v$  sind durch gestrichelte Rechtecke gekennzeichnet, während das jeweilige  $\mathbf{H}$  farbig hervorgehoben ist.

<sup>5</sup>Für  $\mathbf{P}_1 \in \mathcal{R}$  ist  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^{-1}$  eine sog. rechtsseitige coprime Faktorisierung, d. h.  $\mathbf{N}_1 \in \mathcal{RH}_\infty$  und  $\mathbf{D}_1 \in \mathcal{RH}_\infty$  sind stabile Übertragungsfunktionen ohne gemeinsame Nullstellen in der rechten  $s$ -HE und „rechtsseitig“ meint, dass die Matrixinverse  $\mathbf{D}_1^{-1}$  auf der rechten Seite von  $\mathbf{N}_1$  steht [MM96], Kapitel 8. Zusätzlich gilt die Normierung:  $\mathbf{D}_1^* \mathbf{D}_1 + \mathbf{N}_1^* \mathbf{N}_1 = \mathbf{I}$  mit  $\mathbf{D}_1^*(s) = \overline{\mathbf{D}_1(-\bar{s})}^T$ . Diese Zerlegung existiert für jede reell-rationale ÜTF [Vin01], S. 10-12.  $\Delta$  setzt sich bei dieser Unsicherheit aus zwei Teilen zusammen:  $\Delta = (\Delta_N^T, \Delta_D^T)^T$ .



Es lässt sich leicht zeigen, dass in beiden Fällen die Übereinstimmung gegeben ist: Die für  $b^H(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})$  benötigte ÜTF von  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T)^T$  nach  $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T)^T$

$$\mathbf{M}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} (\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{P}_1)^{-1} \begin{bmatrix} -\mathbf{C} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

kann aus Abbildung 5.4(a) abgelesen werden. Dies entspricht genau der ÜTF  $\mathbf{T}(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})$ , also von  $(\mathbf{r}_2^T, \mathbf{r}_1^T)^T$  nach  $(\mathbf{y}^T, \mathbf{u}^T)^T$  aus Abschnitt 5.2.1, nur mit umgekehrten Vorzeichen. Das Vorzeichen beeinflusst grundsätzlich nicht die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm, sodass gilt:  $\|\mathbf{M}_v\|_\infty = \|\mathbf{T}(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})\|_\infty$ . Auch die ÜTF  $\mathbf{M}_c$  von  $(\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T)^T$  nach  $\mathbf{p}$  in Abbildung 5.4(b) hat (bedingt durch die spezielle Normierung) die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm  $\|\mathbf{T}(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})\|_\infty$ . Bei Verwendung dieser Unsicherheiten wird das Kriterium (5.7) als Stabilitätsreserve  $b_{P_1C}$  bezeichnet.

Das zugehörige Abstandsmaß beinhaltet im Fall der coprime factor Unsicherheit die zwei Teile  $\Delta_N$  und  $\Delta_D$ , welche zu einer Matrix zusammengefasst werden. Bei zusätzlicher Berücksichtigung der o. g. Minimierung über alle möglichen Unsicherheiten mit (5.5) als Nebenbedingung ergibt sich die sog. *gerichtete Lücke*, engl. *directed gap* [El-85]  $\delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  [Vin01]<sup>6</sup>:

$$\delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) := \inf_{\begin{pmatrix} \Delta_N \\ \Delta_D \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_\infty} \left\{ \left\| \begin{pmatrix} \Delta_N \\ \Delta_D \end{pmatrix} \right\|_\infty : \mathbf{P}_2 = (\mathbf{N}_1 + \Delta_N)(\mathbf{D}_1 + \Delta_D)^{-1} \right\}. \quad (5.10)$$

Alternativ ist es möglich, Bedingung (5.6) zu berücksichtigen, was zu einer ähnlichen Formel führt (hier nicht angegeben) und als *Vinnicombe gap metric*, Vinnicombe Metrik oder  $\nu$ -gap metric  $\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  [Vin93] bezeichnet wird. Beide Abstandsmaße unterscheiden sich nur minimal im Zahlenwert ( $\delta_\nu \leq \delta$ ), ermöglichen aber unterschiedliche Berechnungsmethoden.

Die Aussage ist nun sehr einfach: Wenn  $b_{P_1C} > \delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$ , dann ist auch  $[\mathbf{P}_2, \mathbf{C}]$  stabil. Es sind alle Bedingungen des o. g. Lemmas berücksichtigt. Eine Minimierung von  $\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  führt also zu ähnlicher Stabilität zwischen Modell und Messung, was die Relevanz als Identifikationskriterium zeigt. Das gleiche gilt auch für die gap metric. Andersherum lässt sich für jedes  $b_{P_1C} < \delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  ein Regler finden, der  $\mathbf{P}_1$  stabilisiert, aber  $\mathbf{P}_2$  destabilisiert. Diese Umkehrung ist bei der gap metric aufgrund des etwas größeren Zahlenwertes streng genommen nicht möglich [Vin01].

Neben dieser Stabilitätsaussage sind folgende Aussagen über die verbleibende Performance (engl. „residual performance“) möglich (ohne Herleitung) [Vin01], S. 106:

$$b_{P_2C} \geq b_{P_1C} - \delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), \quad (5.11)$$

<sup>6</sup>Der Name „directed gap“ deutet an, dass  $\delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)$  nicht gleich  $\delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1)$  ist. Daher wird die *gap metric* definiert:  $\delta(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \max(\delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), \delta^{\rightarrow}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1))$ .

$$\arcsin b_{P_2C} \geq \arcsin b_{P_1C} - \arcsin \delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2). \quad (5.12)$$

Die Identifikation in der ( $\nu$ -)gap metric führt also auch zu ähnlicher Performance. Aus (5.11) wird bei Vernachlässigung der Fallunterscheidung in (5.7), also praktisch bei gegebener Stabilität, folgender Ausdruck, der (5.3) ähnelt:

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{P}_2, \mathbf{C})\|_\infty^{-1} \geq \|\mathbf{T}(\mathbf{P}_1, \mathbf{C})\|_\infty^{-1} - \delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2). \quad (5.13)$$

Weiterhin lässt sich die  $\nu$ -gap metric auch über die Performance-Verschlechterung definieren (nur für kleine Werte gültig) [Vin01]:

$$\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sin \left( \sup_{\mathbf{C}} |\arcsin(b_{P_1C}) - \arcsin(b_{P_2C})| \right). \quad (5.14)$$

Dies verdeutlicht noch einmal, dass es sich um eine worst-case Abschätzung bzgl. des Reglers handelt, was auch die folgende Aussage zeigt: Die Abweichung des geschlossenen Regelkreises, also  $\mathbf{T}$  ist für ein gegebenes  $\alpha$  mit  $\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) < \alpha < 1$  begrenzt [Vin01]:

$$\sup_{\mathbf{C}: b_{P_1, C} \geq \alpha} \|\mathbf{T}(\mathbf{P}_1, \mathbf{C}) - \mathbf{T}(\mathbf{P}_2, \mathbf{C})\|_\infty = \frac{\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)}{\alpha \sin(\arcsin \alpha - \arcsin(\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2)))}. \quad (5.15)$$

Somit adressiert die  $\nu$ -gap metric auch die dritte in Abschnitt 5.2.1 aufgestellte Anforderung an eine regelungstechnisch relevante Identifikation, d. h. die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises zwischen beiden Modellen, wenn der gleiche Regler verwendet wird.

#### 5.2.4 Fazit

Eine regelungstechnisch relevante Identifikation sollte ein bestimmtes Reglerauslegungsziel unterstützen. Bei dem hier definierten Ziel ergibt sich, dass für die Identifikation der Regelstrecke schon der modellbasierte Regler bekannt sein müsste. Um dieses Problem zu umgehen, können Abstandsmaße verwendet werden, die anstelle der genauen Kenntnis des Reglers in mancher Hinsicht eine worst-case Abschätzung erlauben. Die betrachteten Abstandsmaße liefern fast gleiche Werte und sind somit als Identifikationskriterien praktisch äquivalent. Von den oben definierten Zielen für die regelungstechnisch relevante Identifikation werden dadurch besonders das zweite und das dritte adressiert, also die Performanceverschlechterung bei Übertragung des modellbasierten Reglers auf das reale System und die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises. Indirekt, zusammen mit der Reglerauslegung, wird auch das erste Ziel unterstützt, die Performance am realen System.

### 5.3 Identifikation von Servo-Systemen mit regelungstechnischen Abstandsmaßen

Nach der allgemeinen Beschreibung im vorherigen Abschnitt, soll nun noch auf bestimmte Aspekte eingegangen werden, die für die Umsetzung der Theorie in der betrachteten Anwendung wichtig sind. Gegenstand von Abschnitt 5.3.1 ist die Überprüfung der Bedingung (5.6). Abschnitt 5.3.2 beschreibt die in Abschnitt 5.2.1 bereits angesprochene Alternative, abwechselnd Regler und Modell zu optimieren. Schließlich geht es in Abschnitt 5.3.3 speziell um die Festlegung der Modellkomplexität.

#### 5.3.1 Berücksichtigung der WZB der Vinnicombe Metrik

Die Formel zur Berechnung der  $\nu$ -gap metric anhand der Frequenzgänge lautet

$$\delta_\nu(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) := \begin{cases} \delta_{\mathcal{L}_2}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2), & \text{für } \det(\mathbf{I} + \mathbf{P}_2^* \mathbf{P}_1) \neq 0 \forall \omega \\ & \text{und } I(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5.16)$$

mit der Windungszahlbedingung (WZB)

$$I(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \text{wno}(\det(\mathbf{I} + \mathbf{P}_2^* \mathbf{P}_1)) + \eta(\mathbf{P}_1) - \bar{\eta}(\mathbf{P}_2). \quad (5.17)$$

Die  $\mathcal{L}_2$ -Metrik ist gegeben durch

$$\delta_{\mathcal{L}_2}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = \sup_{\omega} \kappa(\mathbf{P}_1(j\omega), \mathbf{P}_2(j\omega)), \quad (5.18)$$

mit dem *punktweisen Abstand*

$$\kappa(\mathbf{P}_1(j\omega), \mathbf{P}_2(j\omega)) = \bar{\sigma} \left( (\mathbf{I} + \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_2^*)^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) (\mathbf{I} + \mathbf{P}_1^* \mathbf{P}_1)^{-\frac{1}{2}} \right) (j\omega). \quad (5.19)$$

Die Herleitung ist in [Vin01], Abschnitt 3.2.2 zu finden.

Das Symbol  $\bar{\eta}(\mathbf{P}_2)$  bezeichnet die Anzahl der Pole von  $\mathbf{P}_2$  in der geschlossenen rechten s-HE. Diese Frequenzbereichsbestimmung ermöglicht die Verwendung von  $\delta_\nu$  als Identifikationskriterium, weil keine Modelle benötigt werden, sondern lediglich die Frequenzgänge, wenn auch durch die endliche Frequenzauflösung eine gewisse Ungenauigkeit entsteht [GCZL15]. Die frequenzabhängige Größe  $\bar{\sigma}$  ist der größte Singulärwert (nur bei MIMO-Systemen relevant).

Die Auswertung der Windungszahlbedingung (5.17) erfordert Vorwissen über das System und ist daher anwendungsspezifisch. Von der Frequenzbereichsmessung sind nur Punkte von  $s$  auf der imaginären Achse bekannt und für die Nyquist D-Kontur wären Punkte mit  $\text{Re}(s) \neq 0$  erforderlich.

In dieser Arbeit werden nur stabile Systeme betrachtet, sodass die WZB näherungsweise bestimmt werden kann, indem der Phasenverlauf über alle gemessenen Frequenzen verfolgt wird, siehe auch [GCZL15]. Die Werte für  $\omega < 0$  entstehen durch Multiplikation der Werte für  $\omega > 0$  mit  $-1$ . Der Übergang  $\omega \rightarrow \infty$  zu  $\omega \rightarrow -\infty$  stellt keine Schwierigkeit dar, weil reale Systeme dort kleine Amplituden haben und die Phase von  $\det(\mathbf{I} + \mathbf{P}_2^* \mathbf{P}_1)$  somit nahe null ist.

Der Fall von Polen im Ursprung kann berücksichtigt werden, wenn ihre Anzahl  $N_{p1}, N_{p2}$  in  $\mathbf{P}_1$  bzw.  $\mathbf{P}_2$  a priori bekannt ist: Beim Verfolgen von Phasenänderungen von hohen zu niedrigen Frequenzen, sollte sich ein Sprung von ca.  $(N_{p1} + N_{p2})\pi$  bei null Hertz ergeben. Entsprechend ist die Phase an dieser Stelle in Vielfachen von  $2\pi$  zu verschieben.

Des Weiteren ergeben sich häufig die gleichen Identifikationsergebnisse, wenn die WZB bei der Identifikation ignoriert wird und nur die  $\mathcal{L}_2$ -Metrik ausgewertet wird. Dies lässt sich folgendermaßen begründen: Bei gegebenen  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{C}$ , welche  $\delta_{\mathcal{L}_2}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) < b_{P_1, C}$  erfüllen, gilt [DV99]:

$$I[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = -\eta[\mathbf{P}_2, \mathbf{C}]. \quad (5.20)$$

Dabei ist  $\eta[\mathbf{P}_2, \mathbf{C}]$  die Anzahl der instabilen Pole der geschlossenen Schleife aus  $\mathbf{P}_2$  und  $\mathbf{C}$ . Wenn also ein Regler bekannt ist, der das reale System stabilisiert, und nur Modelle vorkommen, die durch diesen Regler stabilisiert werden, dann garantiert (5.20)  $I[\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] = 0$ , sofern

$$\delta_{\mathcal{L}_2}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) < b_{P_1, C}. \quad (5.21)$$

Bei den hier betrachteten Systemen erfüllen die zum Verfahren der Achsen verwendeten PI-Regler diese Bedingung. Aufgrund des interlacings, siehe Abschnitt 4.3.2, sind PI-Regler auch für alle kollokierten Modelle stabil [Ewi00]. Das bedeutet, dass immer dann, wenn die  $\mathcal{L}_2$ -Metrik klein ist im Sinne von (5.21), die WZB erfüllt ist. In Experimenten wurde dies auch in [DBG14] beobachtet. Trotzdem könnte es sinnvoll sein, die WZB zu prüfen, weil sonst lokale Minima zu einer langsameren Konvergenz führen könnten.

Es ist außerdem ein Ansatz bekannt, der im ersten Schritt nur die  $\mathcal{L}_2$ -Norm minimiert, und im zweiten Schritt ein Modell berechnet, das mit möglichst kleinen Änderungen auch die WZB erfüllt [DV99; DV04]. Dies wird hier nicht verfolgt, weil dabei die physikalische Interpretierbarkeit der Modelle verloren ginge.

### 5.3.2 Iterative Identifikation und Reglerauslegung

Wie in Abschnitt 5.2.1 bereits angekündigt, ist die hier untersuchte Alternative zur Minimierung der  $\nu$ -gap metric zwischen Modell und Messung die abwechselnde Identifikation bei gekanntem Regler

und Reglerauslegung bei bekanntem Modell inkl. Unsicherheitsmenge. Ziel ist es, die worst-case (WC) Performance

$$\mathcal{J}_{\text{WC}}(\mathcal{P}, \mathbf{C}) = \sup_{\mathbf{P} \in \mathcal{P}} \|\mathbf{W}_{uy} \mathbf{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C}) \mathbf{V}\|_{\infty} \quad \text{mit } \mathbf{P}_0 \in \mathcal{P} \quad (5.22)$$

über alle Modelle der Unsicherheitsmenge  $\mathcal{P}$  zu minimieren [OB12]. Ein iteratives Verfahren könnte so aussehen, dass in jedem Schritt  $k$  erst die Identifikation durchgeführt wird und dann die Reglerauslegung. Begonnen wird mit  $k = 1$ .

Die **Identifikation** lässt sich wie folgt angeben, denn damit wird laut (5.3) indirekt die worst-case Performance optimiert:

$$\hat{\mathbf{P}}_k = \arg \min_{\mathbf{P}} \underbrace{\|\mathbf{W}_{uy} (\mathbf{T}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C}_{k-1}) - \mathbf{T}(\mathbf{P}, \mathbf{C}_{k-1})) \mathbf{V}\|_{\infty}}_{\gamma_k}. \quad (5.23)$$

Als Startwert muss ein Regler  $\mathbf{C}_0$  bekannt sein, der das System stabilisiert.

Gleichung 5.23 definiert mit dem resultierenden Residuum  $\gamma_k$  ein Toleranzband um  $\hat{\mathbf{P}}_k$ , in dem die Messwerte variieren dürfen, ohne dass das Residuum vergrößert würde. Das Toleranzband wird als Unsicherheitsmenge  $\mathcal{P}$  für die anschließende Reglerauslegung benötigt. Es lässt sich für jedes endliche  $\gamma_k$  in der Form von Abbildung 5.3 beschreiben. Dazu wird die sog. *dual-Youla Unsicherheit* in einer speziellen Normierung mit  $\|\Delta_u\|_{\infty} \leq \gamma_k$  benötigt [OvQ+13; BLO20]:

$$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{D}_c \Delta_u)(\mathbf{D}_1 - \mathbf{N}_c \Delta_u)^{-1}, \quad \Delta_u \in \mathcal{RH}_{\infty}. \quad (5.24)$$

Das Modell  $\mathbf{P}_1$  ist in Form der rechtsseitigen koprimen Faktorisierung  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{N}_1 \mathbf{D}_1^{-1}$  enthalten, ebenso der Regler  $\mathbf{C}_{k-1} = \mathbf{N}_c \mathbf{D}_c^{-1}$  [vOvB10]. Details zur Normierung sind beispielsweise in [TJZJb] im Anhang oder in [OB12] angegeben. Eine Visualisierung ist in Abbildung 5.5 gezeigt. Es lässt sich anhand der Abbildung leicht nachrechnen, dass das zugehörige  $\mathbf{M}_{\text{dY}}$  null ist, sodass die Stabilitätsbedingung (5.8) zusammen mit (5.5) für jede endliche  $\mathcal{H}_{\infty}$ -Norm von  $\Delta_u$  eingehalten wird. Außerdem folgt aus der Abbildung die  $\mathbf{H}$ -Matrix:

$$\mathbf{H}_{\text{dY}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{N}_c & \mathbf{D}_1^{-1} \\ \mathbf{D}_c + \hat{\mathbf{P}}_k \mathbf{N}_c & \hat{\mathbf{P}}_k \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Nun beginnt der **Reglerauslegungsschritt**. Dieser ist hier nur für den Spezialfall  $W_u = W_i^{-1}$ ,  $W_y = W_o$ ,  $V_1 = W_i$ ,  $V_2 = W_o^{-1}$  angegeben, weil der allgemeine Fall schwieriger umzusetzen wäre und für den Vergleich mit der  $\nu$ -gap metric ohnehin die Einschränkung nötig ist. Zur Herleitung

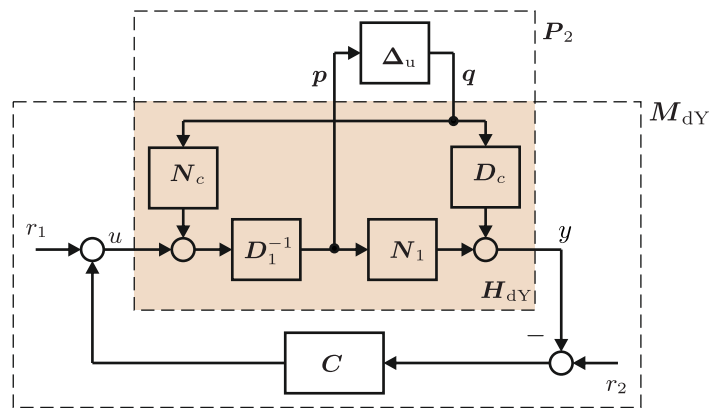


Abbildung 5.5: Standard-Regelkreis in der Form von Abbildung 5.3 mit dual-Youla Unsicherheit

der Ausdrücke dient die Darstellung des Regelkreises gemäß Abbildung 5.6 mit der Matrix  $N$  in Blockstruktur

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \quad N_{11} = M_b \text{ (siehe Abbildung 5.3)}, \quad (5.26)$$

entsprechend den zwei Eingängen  $q$ ,  $w$  und zwei Ausgängen  $p$ ,  $z$ . Die Matrix  $S$  beschreibt allgemein die Verschaltung von Modell und Regler und die Interaktion mit  $w$  und  $z$  aus Abbildung 5.2.

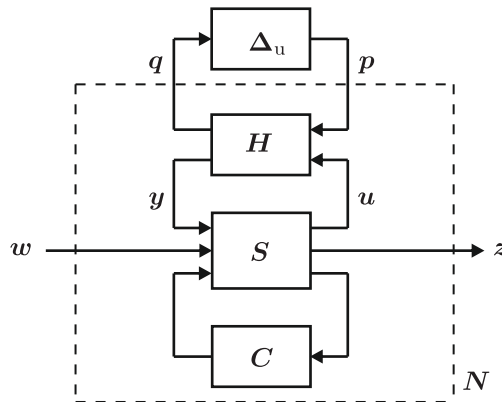


Abbildung 5.6: Allgemeiner Regelkreis mit den Hilfsgrößen  $S$ ,  $G$  und  $N$

Die worst-case Reglerauslegung entspricht nun der Optimierung mit Nebenbedingung

$$C_k = \arg \min_{C \in \mathcal{RL}_\infty} (\|N_{22}(C)\|_\infty \mid \|N_{11}(C)\|_\infty < 1/\gamma_k), \quad (5.27)$$

wobei schon  $C_{k-1}$  als Startwert bekannt ist<sup>7</sup> [SP05].

<sup>7</sup>Dieser Startwert hat die Eigenschaft  $N_{11}(C_{k-1}) = \mathbf{0}$  und erfüllt somit die Nebenbedingung [SP05]. Durch die Optimierung darf sich  $N_{11}$  verändern, solange die Nebenbedingung noch erfüllt ist.

Für die Lösung dieses Optimierungsproblems wird von dem sog. *strukturierten Singulärwert*  $\mu_{\Delta}(\mathbf{N})$  Gebrauch gemacht [SD91], welcher abhängig von  $\mathbf{N}$  und von der Menge zulässiger Unsicherheiten  $\Delta_{\text{zul}}$  allgemein wie folgt definiert ist:

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{N}) := \left( \min_{\Delta \in \Delta_{\text{zul}}} (\bar{\sigma}(\Delta) | \det(\mathbf{I} - \mathbf{N}\Delta) = 0) \right)^{-1}. \quad (5.28)$$

Im Gegensatz zum maximalen Singulärwert berücksichtigt der strukturierte Singulärwert, dass  $\Delta$  auf eine bestimmte Struktur begrenzt ist, d. h. aus Blöcken auf der Hauptdiagonalen besteht und sonst nur Nullen enthält.

Zur praktischen Berechnung kann die obere Schranke

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{N}) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(\mathbf{D}\mathbf{N}\mathbf{D}^{-1}) \quad (5.29)$$

ausgewertet werden, indem die Skalierungsmatrix  $\mathbf{D}$  für jede Frequenz optimiert wird. Die Menge  $\mathcal{D}$  berücksichtigt die Struktur von  $\Delta$  indem es die Suche auf solche  $\mathbf{D}$  beschränkt, für die gilt:  $\mathbf{D}\Delta = \Delta\mathbf{D}$ . Diese obere Schranke ist für bis zu drei Blöcke in  $\Delta$  sogar exakt und die Minimierung ist konvex, d. h. jedes lokale Optimum ist auch ein globales Optimum [SD91].

In dem hier betrachteten Fall hat  $\Delta$  die Struktur

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_p \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

mit einem der eigentlichen Unsicherheit zugeordneten Block  $\Delta_u$  und einem zweiten der Performance zugeordneten Block  $\Delta_p$ . Die beiden Blöcke korrespondieren zu dem Unsicherheitskanal  $\mathbf{N}_{11}$  und dem Performancekanal  $\mathbf{N}_{22}$ . Sowohl  $\Delta_u$  als auch  $\Delta_p$  sind komplex und haben keine weitere Struktur. Damit ist  $\mathbf{D}$  auf die Form

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & d_2 \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

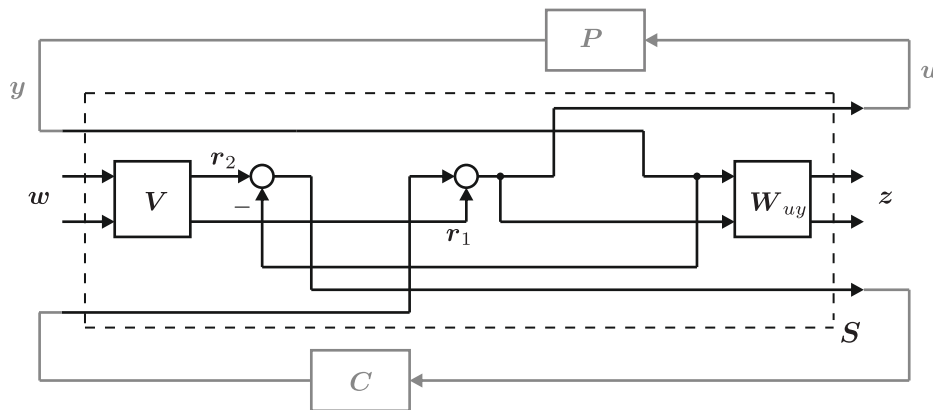
begrenzt [SP05], S. 310, wobei die Skalare  $d_1$  und  $d_2$  reell und positiv gewählt werden können. Außerdem kann  $\mathbf{D}$  beliebig mit einem (komplexen) Skalar skaliert werden, ohne dass dies einen Einfluss auf (5.29) hätte. Entweder  $d_1$  oder  $d_2$  kann also auf 1 gesetzt werden. Die Suche vereinfacht sich dadurch zu

$$\mu_{\Delta}(\mathbf{N}) = \min_{d_1 > 0} \bar{\sigma} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & d_1 \mathbf{N}_{12} \\ d_1^{-1} \mathbf{N}_{21} & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} \right), \quad (5.32)$$

d. h. es muss nur der Skalar  $d_1$  als Funktion der Frequenz optimiert werden. Üblicherweise wird dieses Optimierungsproblem für endlich viele Frequenzstützpunkte gelöst und danach eine ÜTF

bestimmt, deren Amplitude gut den Verlauf von  $d_1(\omega)$  wiedergibt. Allerdings muss diese ÜTF bei der anschließenden Reglerauslegung mit berücksichtigt werden, was deren Ordnung erhöht und somit die numerische Stabilität verschlechtert.

Zur Bestimmung von  $N$  für die gegebene Unsicherheit  $H_{dY}$  und die Struktur aus Abbildung 5.2 wird die ÜTF  $S$  berechnet, indem in Abbildung 5.2  $P$  und  $C$  extrahiert werden. Es entsteht die Abbildung 5.7. Die Matrix  $N$  ergibt sich dann aus  $H$ ,  $S$  und  $C$ , wie in Abbildung 5.6 gezeigt.



**Abbildung 5.7:** Definition der Verbindungsmatrix  $S$ , ergibt sich durch Extrahieren von  $P$  und  $C$  aus Abbildung 5.2

Aufgrund der Normierung von  $D_1$ ,  $N_c$  und  $D_c$  gilt  $\bar{\sigma}(N_{12}) = \bar{\sigma}(N_{21}) \forall \omega$  [OB12]. Siehe dazu auch Anhang C. Wenn  $N$  eine  $2 \times 2$ -Matrix wäre, ließe sich das optimale  $d_1$  analytisch herleiten, indem der größte Singulärwert gemäß [SP05], S. 522 geschlossen berechnet würde. Durch Ableiten dieses reellen Ausdrucks nach  $d_1$  und gleichsetzen mit null zeigt sich, dass  $d_1$  bei eins eine Extremstelle hat. Aus der zweiten Ableitung folgt, dass es sich um ein Minimum handelt.

Im vorliegenden Fall ist  $N$  allerdings eine  $3 \times 3$ -Matrix, wodurch sich das Minimum des maximalen Singulärwertes leicht von eins weg verschiebt. Bei allen getesteten  $N$  war das Minimum aber nur minimal günstiger (4. Nachkommastelle) als der Wert bei eins. Deshalb wird unter Ausnutzung der betrachteten Unsicherheitsstruktur auf diese Skalierung verzichtet und  $\mu_\Delta(N)$  wird zu  $\bar{\sigma}(N)$ .

Bisher wurde noch nicht berücksichtigt, dass Kostenfunktional und Nebenbedingung in (5.27) unterschiedlich behandelt werden müssen [FF99; OvQ+13]. Zur Berücksichtigung der Nebenbedingung bei der angestrebten  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimierung wird die skalare, frequenzunabhängige Skalierung  $k_m$  eingeführt. Die Matrix

$$\mathbf{K}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_m} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k_m} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$



dient dazu,  $\mathbf{N}$  so zu skalieren, dass  $\mathbf{K}_m \mathbf{N} \mathbf{K}_m$  insgesamt einen maximalen strukturierten Singulärwert über alle Frequenzen von  $1/\gamma_k$  aufweist [SP05]<sup>8</sup>. Je größer  $k_m$  desto kleiner und damit besser ist  $\|\mathbf{N}_{22}\|_\infty$ . Durch die Vereinfachung vom strukturierten Singulärwert zum größten Singulärwert lässt sich diese Vorschrift auch als  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm schreiben:

$$\|\mathbf{K}_m \mathbf{N} \mathbf{K}_m\|_\infty \stackrel{!}{=} 1/\gamma_k. \quad (5.34)$$

Insgesamt ergibt sich für den Reglerauslegungsschritt die Aufgabe:

$$C_k = \arg \max_{C \in \mathcal{RL}_\infty} (k_m | \|\mathbf{K}_m(k_m) \mathbf{N}(C) \mathbf{K}_m(k_m)\|_\infty = 1/\gamma_k). \quad (5.35)$$

Zur Lösung dieses Problems wechseln sich die Bestimmung von  $k_m$  und die Optimierung des Reglers mehrfach ab. Weil  $\|\mathbf{K}_m(k_m) \mathbf{N} \mathbf{K}_m(k_m)\|_\infty$  eine monoton steigende Funktion von  $k_m$  ist [SP05], ist die Lösung der Bestimmungsgleichung (5.34) nach  $k_m$  ein einfaches Optimierungsproblem. Hier wird  $k_m$  mehrfach gemäß der iterativen Folge

$$k_m \leftarrow k_m / (\gamma_k \cdot \|\mathbf{K}_m \mathbf{N} \mathbf{K}_m\|_\infty) \quad (5.36)$$

aktualisiert.

Die im Wechsel dazu stattfindende  $\mathcal{H}_\infty$ -Regleroptimierung löst das Problem

$$C_k = \min_{C \in \mathcal{RL}_\infty} (\|\mathbf{K}_m \mathbf{N}(C) \mathbf{K}_m\|_\infty). \quad (5.37)$$

In dieser Arbeit dient dazu die Matlab Funktion `hinfsyn` mit der  $4 \times 4$  ÜTF-Matrix

$$\text{diag}(1, \sqrt{k_m}, \sqrt{k_m}, 1) \cdot \mathbf{G} \cdot \text{diag}(1, \sqrt{k_m}, \sqrt{k_m}, 1) \quad (5.38)$$

als Argument. Die Hilfsgröße  $\mathbf{G}$  ergibt sich aus der Zusammenschaltung von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{S}$  in Abbildung 5.6.

Nach mehreren inneren Iterationen bestehend aus (5.36) und (5.37) wird  $k$  hochgezählt und es folgt wieder der Identifikationsschritt 5.23. Ein Abbruch ist beispielsweise nach einer vorgegebenen Iterationszahl möglich.

Es muss verhindert werden, dass die Ordnung von  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{C}$  in jedem Iterationsschritt  $k$  zunimmt. Ohne geeignete Maßnahmen würde  $\mathbf{H}$  die Komplexität von  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{C}$  gemäß den Regeln zur Verknüpfung von Zustandsraumdarstellungen [Cod05] akkumulieren und der darauf basierende Regler wäre komplexer als der vorherige, usw.

<sup>8</sup>Üblicherweise wird eine vorgelagerte Skalierungsmatrix verwendet [SP05]. Um jedoch die Eigenschaft  $\|\mathbf{N}_{12}\|_\infty = \|\mathbf{N}_{21}\|_\infty$  nicht zu verlieren, wird  $\mathbf{K}_m$  hier mit  $\sqrt{k_m}$  geschrieben und von links und rechts multipliziert. Dies ist möglich, denn  $\det(\mathbf{I} - \mathbf{K}_m^2 \mathbf{N} \Delta) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{K}_m \mathbf{N} \Delta \mathbf{K}_m) = \det(\mathbf{I} - \mathbf{K}_m \mathbf{N} \mathbf{K}_m \Delta)$ . Das erste Gleichheitszeichen gilt aufgrund der Eigenschaften der Determinante, das zweite aufgrund der Kommutativität von  $\mathbf{K}_m$  und  $\Delta$ .

Als Gegenmaßnahme wird in dieser Arbeit der Matlab Befehl `ncfmr` verwendet. Er reduziert die Ordnung unter Beibehaltung der Stabilität, wie bei der `gap metric`. Die maximale Anzahl der Zustände wird willkürlich auf  $2N_Z$  festgelegt, also doppelt so groß wie die Anzahl der Zustände des betrachteten Modells.

### 5.3.3 Festlegung der Modellordnung bei der Modellauswahl

Die Parameteridentifikation geht in eine Modellauswahl über, wenn die Kostenfunktion für die Identifikation auch zur Auswahl des Modells verwendet wird. Mit einem separaten Validierungsdatensatz kann auch hier die Modellordnung bestimmt werden, die zu der höchsten Genauigkeit führt. Darüber hinaus sind aber ggf. anwendungsabhängige Zusatzkriterien nötig, z. B.:

1. eine maximal zulässige Modellordnung, sodass die Reglerhardware vorgegebene Echtzeitanforderungen erfüllen kann,
2. eine erhöhte Modellordnung wird nur dann akzeptiert, wenn sie eine bestimmte Mindestleistungsverbesserung mit sich bringt, wie in [TdO21] vorgeschlagen.
3. Die sog. optimale Stabilitätsreserve  $b_{\text{opt}}$  ist die beste Stabilitätsreserve, die mit einem Regler am Modell erreicht werden kann [MG92]. Sie sollte den Abstand  $\delta_v$  zwischen Modell und System um mindestens etwa 0,3 übersteigen, wenn regelungstechnisch relevante Gewichte verwendet werden, wie in Abschnitt 5.2.1.

Die ersten beiden Möglichkeiten sind eher pragmatisch. Die dritte vorgeschlagene Möglichkeit nutzt die Tatsache, dass es in diesem Fall garantiert einen Regler gibt, der eine verallgemeinerte Stabilitätsreserve von mindestens 0,3 an der realen Strecke erreicht, wie aus (5.11) hervorgeht. Die zusätzliche Stabilitätsreserve von 0,3 soll parasitäre Nichtlinearitäten, unerwartete Änderungen des Systems während seiner Lebensdauer usw. berücksichtigen. Der genaue Wert ist willkürlich. Es kann passieren, dass keines der Modelle dieses Kriterium erfüllt, z. B. weil die optimale Stabilitätsreserve kleiner oder kaum größer als 0,3 ist. Dann sind ggf. die Anforderungen in Form der Gewichte  $V$  und  $W_{wy}$  zu überdenken - eine Entscheidung, die wohl nicht einfach vollständig zu automatisieren ist.

## 5.4 Experimenteller Vergleich der Identifikationsmethoden

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Eignung der Kriterien aus Abschnitt 5.3.1 bzw. 5.3.2 experimentell mit der eher gebräuchlichen Minimierung der Summe der Fehlerquadrate zu vergleichen. Von Interesse ist u. a. , in wie weit die in Abschnitt 5.2.1 definierten Ziele für eine regelungstechnisch relevante Identifikation erfüllt werden. Ein solcher Vergleich wurde nach Wissen des Autors bisher noch nicht durchgeführt.

Abschnitt 5.4.1 beschreibt die Versuchsdurchführung, während Abschnitt 5.4.2 speziell auf die Ergebnisse mit dem iterativen Verfahren eingeht. In Abschnitt 5.4.3 werden dann die Ergebnisse zum Vergleich der Kriterien präsentiert, bevor in den Abschnitten 5.4.4 und 5.4.5 die Vergleiche um die Rechenzeit und die Bestimmung der Modellordnung erweitert werden.

### 5.4.1 Durchführung der Versuche und Berechnungen

Die Grundlage sind Frequenzgangmessungen, die wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, aufgenommen wurden, vgl. Abbildung 3.4. Beim RBG wird wieder die  $x$ -Achse untersucht, weil hier die Regelung aufgrund der niederfrequenten Mastschwingungen und des elastischen Riemens besonders interessant ist. Als Trainings- und Validierungsdaten dienen aufeinanderfolgende Messungen unter gleichen Bedingungen.

Zur Definition des genauen Reglerauslegungsziels müssen die Gewichtungen in (5.1) festgelegt werden. Um die Vergleichbarkeit der verschiedenen Methoden zu wahren, werden allerdings nur  $\mathbf{W}_i$  und  $\mathbf{W}_o$  frei gewählt und dann  $\mathbf{W}_{uy}$  und  $\mathbf{V}$  gemäß Abschnitt 5.2.1 berechnet. Außerdem muss nicht zwischen Eingangs- und Ausgangsgewichtung unterschieden werden, weil es sich in diesem Fall um Skalare handelt. Das Produkt  $\mathbf{W}_o \hat{P}_0 \mathbf{W}_i$  sollte so definiert werden, dass  $\mathbf{W}_o \hat{P}_0 \mathbf{W}_i$  betragsmäßig etwa dem gewünschten offenen Regelkreis entspricht [MG92]. Nach der Optimierung des Reglers ist  $\mathcal{J}(\mathbf{P}_0, \mathbf{C})$  ein Indikator für die erreichte Nähe zum gewünschten Frequenzgang [ZD98], S. 329. Regeln zur Festlegung der Gewichte sind in [Mah20], S. 118 und [WvSB05] zu finden.

Bei den hier vorgestellten Versuchen werden die Gewichte so gewählt, dass bei mittleren Frequenzen die Verstärkung  $V_m$  beträgt, bei niedrigen Frequenzen  $V_{ss}$  und bei hohen Frequenzen  $V_{hoch}$ , mit den Werten aus Tabelle 5.1. Der Übergang findet jeweils bei den Frequenzen  $f_{ss}$  und  $f_{hoch}$  statt. Beide Übergänge werden mit der Matlab Funktion `makeweight` erzeugt. Das Gewicht  $V_m$  ist maßgeblich für die resultierende Bandbreite verantwortlich, die sich bei beiden Prüfständen etwas höher ergibt als die untere Resonanzfrequenz.

**Tabelle 5.1:** Gewichte für die Festlegung der Kostenfunktion (5.1)

Prüfstand	$V_{ss}$	$f_{ss}$	$V_m$	$f_{hoch}$	$V_{hoch}$	Ordnung
RBG, $x$ -Achse	20	0,7 Hz	2	10 Hz	0,2	1
Einzelachse	10	1 Hz	1	20 Hz	0,1	2

Es werden vier Modelle mit 2, 5, 8 bzw. 11 Parametern berücksichtigt, entsprechend Einmassensystem (EMS) bis Viermassensysteme (VMS) mit kolloziertem Sensor ohne Totzeit. Zusätzlich befindet sich an der letzten Masse ein Dämpfer zur Umgebung.

Zur Identifikation wird das iterative Verfahren aus Abschnitt 5.3.2 mit der  $\nu$ -gap metric, wie in den Abschnitten 5.2.3 und 5.3.1 beschrieben, verglichen. Zusätzlich wird die Summe der Fehlerquadrate

für den Abstand in der komplexen Ebene (3.13) bzw. die logarithmische Amplitude und die Phase (3.21) betrachtet. Dabei bestimmt der PSO von Matlab direkt die physikalischen Parameter  $m_i$ ,  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$ . Obwohl es spezielle Optimierer für die  $\mathcal{H}_\infty$ -Optimierung gibt [OB08], wurde dieser Algorithmus gewählt, weil er in Vorversuchen wiederholt die gleiche Lösung gefunden hat, also zu konvergieren scheint. Um trotzdem noch zuverlässiger das Optimum zu finden, werden alle Identifikationen vier mal durchgeführt und dann das Ergebnis mit dem geringsten Residuum weiter verwendet. Für die Dämpfungsparameter werden nur Werte  $\geq 0,001 \text{ Nm} \cdot \text{s/rad}$  zugelassen, damit keine Pole nahe der imaginären Achse oder in der rechten  $s$ -Halbebene entstehen können. Bei dem Kostenfunktional (3.21) ist die Gewichtung der logarithmischen Amplitude  $2\pi$  und die der Phase 1,0.

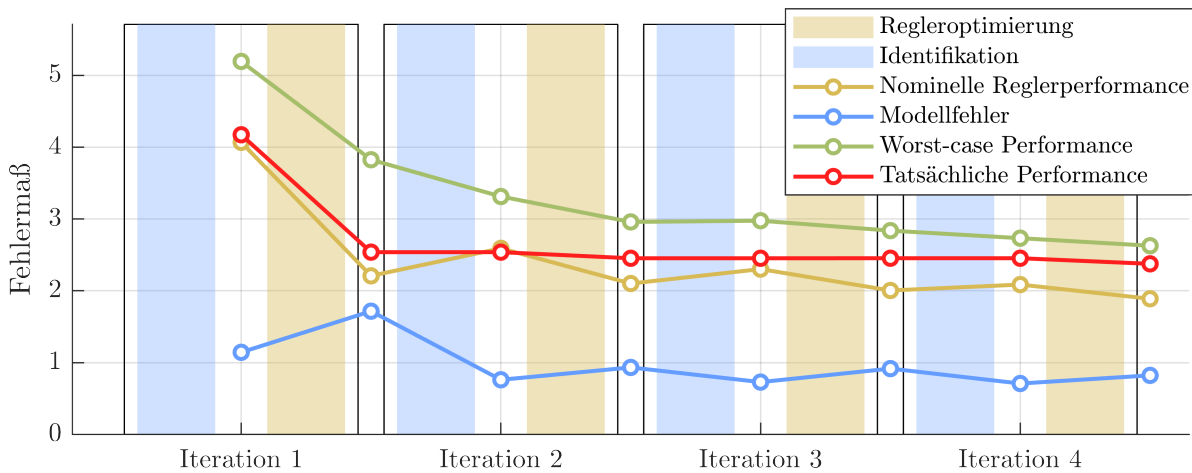
Zur Verkürzung der Rechenzeit wird die Identifikation wieder parallel auf zwölf Rechenkernen des Clusters, siehe Abschnitt 3.2.3, durchgeführt. Außerdem wird von dem Matlab mex-Compiler Gebrauch gemacht. Letzteres führt hier allerdings nicht zu einer eindeutigen Verbesserung, möglicherweise weil die in den Kostenfunktionen verwendeten page-Funktionen ohnehin recht zeiteffizient sind.

#### 5.4.2 Ergebnisse des iterativen Verfahrens aus Identifikation und Reglerauslegung

Bevor der nächste Abschnitt die Ergebnisse zu den Identifikationskriterien gegenüberstellt, wird zunächst gezielt auf das iterative Verfahren eingegangen. Bei diesem werden vier Iterationen (vier Identifikationen gemäß (5.23) und vier worst-case Reglerauslegungen 5.35) durchgeführt. Im Reglerauslegungsschritt wird fünf mal das Problem (5.37) gelöst. Für die im Wechsel dazu stattfindende Bestimmung von  $k_m$  werden zehn Iterationen (5.36) durchgeführt. Die Regleroptimierungsschritte machen nicht Gebrauch von parallelen Berechnungen auf mehreren Rechenkernen, weil die einzelnen Schritte aufeinander aufbauen. Allerdings dominieren auch die Identifikationszeiten.

Als Beispiel für das Konvergenzverhalten sind in Abbildung 5.8 verschiedene Kenngrößen über die vier Schritte aufgetragen. Während der Identifikation verbessert sich der Modellfehler oder er bleibt unverändert, während sich die nominelle Reglerperformance typischerweise leicht verschlechtert. Letzteres liegt daran, dass der Regler nur für das Modell vor der Identifikation optimal ist. In den Regleroptimierungsschritten ist typischerweise ein gegenläufiges Verhalten zu beobachten: Es verschlechtert sich das Residuum der Identifikation leicht, weil das Modell für den neuen Regler nicht mehr optimal ist. Die worst-case Performance verbessert sich meistens monoton, weil sie ja in beiden Schritten zumindest indirekt optimiert wird. Sie kann sich aber auch vorübergehend verschlechtern. Ein Grund für die Verschlechterung ist, dass nach der Regleroptimierung der optimierte Regler in die Unsicherheitsmenge nach (5.25) eingesetzt wird, sodass sich deren Form verändert und der Regler nicht mehr optimal ist. Außerdem minimieren Identifikation und Reglerauslegung nicht exakt die gleiche Kostenfunktion. Auch die Ordnungsreduktion des Reglers kann zu einer Verschlechterung führen. So ist insgesamt das Verfahren fragil, hat aber bei den hier untersuchten

Modellen immer zu einer Verbesserung über die acht Schritte geführt und einen Verlauf ähnlich dem in Abbildung 5.8 gezeigt.



**Abbildung 5.8:** Konvergenzverhalten des iterativen Verfahrens aus Identifikation und Reglerauslegung für das Modell mit elf Parametern, Frequenzgang des RBG. Nominelle Reglerperformance:  $\|W_{uy}T(\hat{P}, C)V\|_{\infty}$ , Modellfehler:  $\|W_{uy}(T(P_0, C) - T(\hat{P}, C))V\|_{\infty}$ , worst-case Performance: siehe (5.22), tatsächliche Performance:  $\|W_{uy}T(P_0, C)V\|_{\infty}$

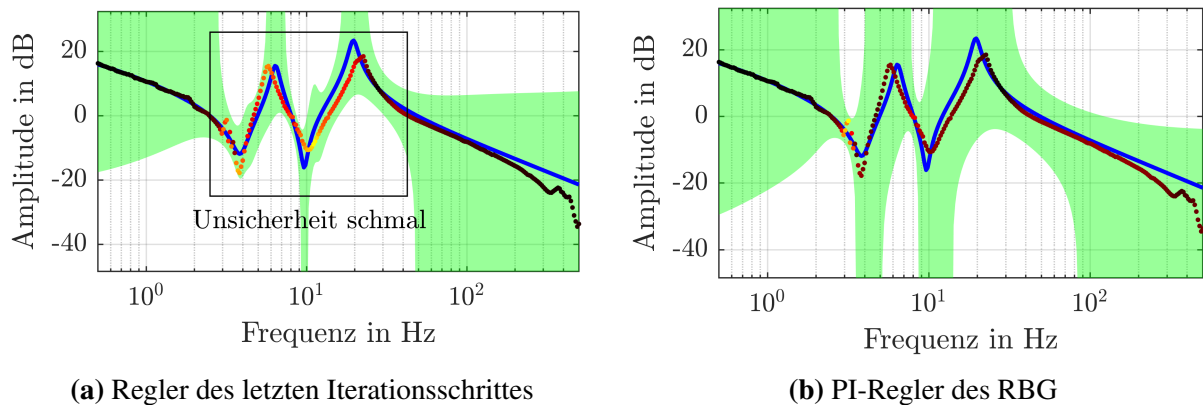
Für das 8 Parameter-Modell aus dem letzten Iterationsschritt, also das DMS-Modell, ist die dual-Youla Unsicherheitsmenge in Abbildung 5.9 gezeigt<sup>9</sup>. Die Farbschattierung der Validierungsdaten zeigt ihren frequenzweisen Abstand zum Modell: schwarz entspricht nah, gold bedeutet maximal entfernt. Um die Abhängigkeit der Unsicherheitsmenge vom Regler zu zeigen, ist das gleiche Modell links mit dem im letzten Schritt bestimmten Regler gezeigt und rechts mit dem PI-Regler, der am Prüfstand für den Motor voreingestellt ist. Die Unsicherheitsmenge ist bei Verwendung des optimierten  $\mathcal{H}_{\infty}$ -Reglers schmaler, besonders im markierten Bereich, als beim PI-Regler. Dies deutet auf eine spezielle Anpasstheit an die genauen Systemeigenschaften hin. Beim PI-Regler verengt sich dagegen die Unsicherheitsmenge nur bei der Bandbreite von etwa 3,3 Hz. Die verbleibende Breite der Unsicherheit ist dort hauptsächlich durch die Welligkeit<sup>10</sup> in der Messung bestimmt.

### 5.4.3 Vergleich der Methoden

Es folgt ein Vergleich der getesteten Identifikationskriterien. In den drei Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.12 sind die drei in Abschnitt 5.2.1 angesprochenen Kennzahlen für regelungstechnisch relevante Modelle (die Performance am realen System, die Verschlechterung beim Übergang

<sup>9</sup>Die dual-Youla Unsicherheit kann durch frequenzabhängige Kreise in der komplexen Ebene beschrieben werden, wie in [DV05] angegeben. Über die Frequenzen hinweg gehört manchmal das Innere und manchmal das Äußere des Kreises zur Unsicherheitsmenge.

<sup>10</sup>Diese Welligkeit wird durch die lange Einschwingzeit des RBG in Kombination mit der kurzen Wartezeit bei jedem Frequenzschritt des gestuften Sinus verursacht.



**Abbildung 5.9:** Bode-Diagramm des Modells mit acht Parametern (blau) inklusive dual-Youla Unsicherheitsmenge (grün) für zwei verschiedene Regler, bestimmt mit dem Algorithmus der iterativen Identifikation und Reglerauslegung. Die Farbe der gepunktet dargestellten Validierungsmessung (schwarz-rot-gold) geht zunehmend ins goldene, wenn der entsprechende Messpunkt nah an der Unsicherheitsgrenze liegt.

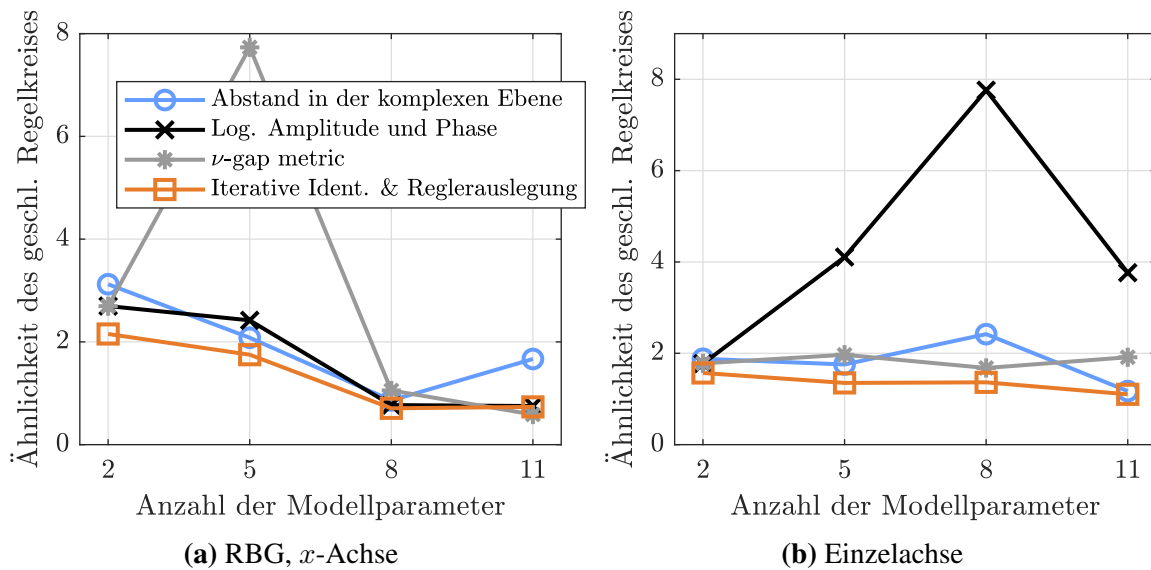
vom Modell zum System und die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises zwischen beiden) über die Modellkomplexität aufgetragen, jeweils für die vier Identifikationskriterien. Die genaue Berechnungsvorschrift steht in der Bildunterschrift. Es wurde der separate Validierungsdatensatz für die Bewertung verwendet. Die für das Bewertungskriterium erforderliche Regler-ÜTF wurde bei dem iterativen Verfahren dem letzten Schritt entnommen. Bei den anderen Verfahren wurde sie auf Basis des identifizierten Modells und der Gewichte  $W_i$  und  $W_o$  nachträglich mit dem Matlab Befehl `ncfsyn` berechnet. So kann die Güte des jeweiligen Modells in Kombination mit dem zugehörigen optimalen Regler bestimmt werden.

Es fällt auf, dass in allen drei Abbildungen bei der  $\nu$ -gap metric bzw. bei dem Kostenfunktional mit der logarithmischen Amplitude an bestimmten Stellen sehr schlechte Werte vorkommen. Zur Untersuchung dieses Problems sind zwei Modelle, die mit der  $\nu$ -gap metric identifiziert wurden, in Abbildung 5.13 zusammen mit der coprime factor Unsicherheit dargestellt<sup>11</sup>. Während die Unsicherheitsmenge bei dem komplexeren Modell schmal ist ( $\delta_\nu(\hat{P}, P_0) = 0,177$ ), ist sie bei dem einfacheren Modell mit  $\delta_\nu(\hat{P}, P_0) = 0,638$  breit. Bei dem 5 Parameter-Modell ist die nominelle Performance 1,389 und kann sich laut (5.12) auf

$$(\sin(\arcsin(1/1,389) - \arcsin 0,638))^{-1} = 8,99 \quad (5.39)$$

verschlechtern. Der aus Abbildung 5.12 abgelesene Wert von 8,72 ist also nicht so schlecht, dass er auf einen Fehler schließen ließe. Vielmehr ist der große Wert mit der  $\nu$ -gap metric am RBG der Tatsache geschuldet, dass das 5 Parameter-Modell sehr ungenau ist. Dies deckt sich auch mit dem visuellen Eindruck anhand von Abbildung 5.13(a). Weitere Werte sind in Tabelle 5.2 gegeben.

<sup>11</sup>Auch diese Unsicherheitsmenge stellt für jede Frequenz einen Kreis dar und kann wie in [DV05] beschrieben berechnet werden.



**Abbildung 5.10:** Erreichte Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises  $\|W_{uy}(T(\hat{P}, C) - T(P_0, C))V\|_\infty$  für die verschiedenen Bewertungskriterien

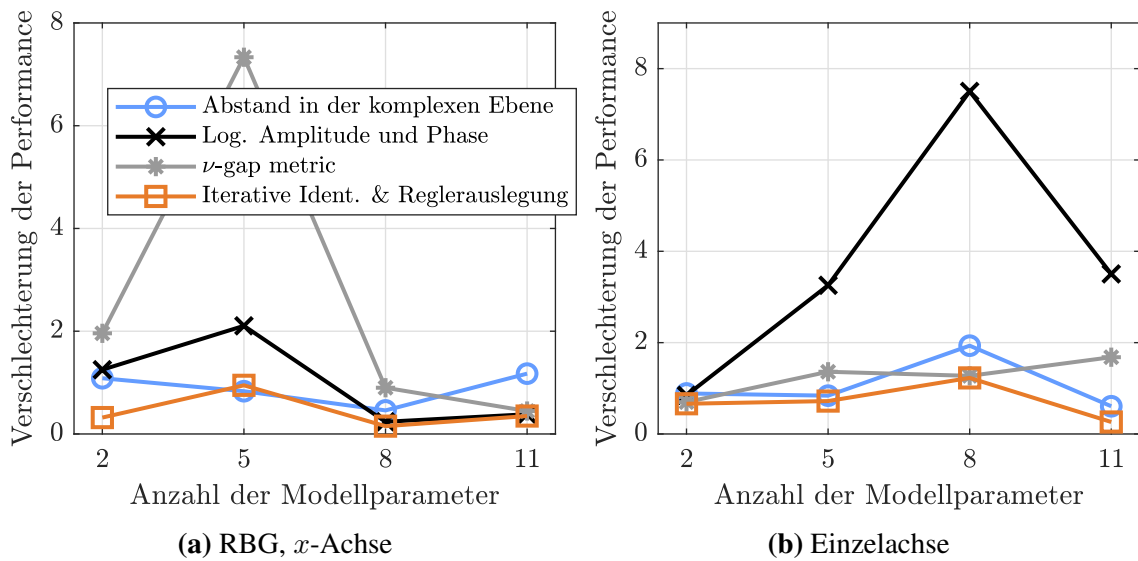
Demnach ergeben sich für die beiden Identifikationsmethoden, welche eine worst-case Aussage zulassen, akzeptable Werte für die genaueren beiden Modelle. Es ist damit garantiert, dass schlechte Werte nur bei ungenauen Modellen auftreten.

**Tabelle 5.2:** Worst-case Performance für die beiden Methoden, die eine solche Aussage zulassen, Prüfstand: RBG,  $x$ -Achse

	Anzahl der Modellparameter			
	2	5	8	11
$\nu$ -gap metric	$\infty$	8,99	2,82	2,24
Iterative Ident. & Reglerauslegung	5,36	3,30	2,78	2,59

Anders ist es z. B. bei der Kostenfunktion mit der gewichteten Summe aus logarithmischer Amplitude und Phase. Um zu analysieren, weshalb dort beim Einzelachsprüfstand und beim 8 Parameter Modell ein schlechter Wert zustande kommt, ist in Abbildung 5.14 der offene Regelkreis zusammen mit dem Abstandsmaß  $\bar{\sigma}(W_{uy}(T(\hat{P}, C) - T(P_0, C))V)$  gezeigt. Der modellbasiert bestimmte Regler wurde zum Einen mit dem Frequenzgang des Modells multipliziert, zum Anderen mit dem gemessenen Frequenzgang.

Der Punkt des größten Abstands liegt bei 57 Hz. Bei dieser Frequenz gibt das Modell die Amplitude genau wieder, aber der Phasenfehler ist groß. Dies fällt mit einer Amplitude von ungefähr 1,0 und einer Phase nahe  $-180^\circ$  zusammen, was nahe am kritischen Punkt ist. Es ist bekannt, dass bei solchen Frequenzen Modellfehler einen besonders großen Einfluss auf regelungstechnische



**Abbildung 5.11:** Verschlechterung der Performance beim Übergang zum realen System  $\|W_{uy}(T(P_0, C))V\|_\infty - \|W_{uy}T(\hat{P}, C)V\|_\infty$  für die verschiedenen Bewertungskriterien

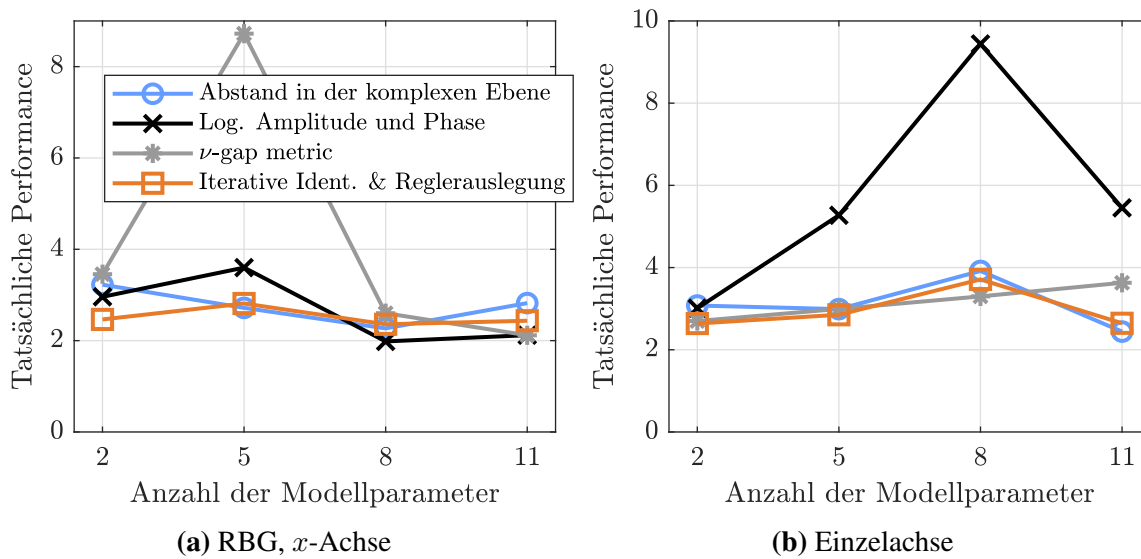
Kennzahlen haben [Lun20]. Durch die starke Gewichtung der Amplitude entsteht bei dieser Kostenfunktion also ein Fehler mit kritischem Einfluss auf die Phase. Somit führt das Kostenfunktional, das in Abschnitt 3.2.2 besonders gut funktioniert hat, in diesem Beispiel zu einem schlechten Ergebnis der Reglerauslegung.

Es ist nicht auszuschließen, dass bei der Verwendung des Abstandes in der komplexen Ebene ähnliche Probleme auftreten, auch wenn dies bei den hier durchgeführten Versuchen nicht der Fall war. Die charakteristische Überbewertung großer Amplituden, z. B. bei Resonanzen und bei den unteren Frequenzen führt zu vergleichsweise großen Fehlern im Bereich kleiner Amplituden.

Wenn es nun um die Frage geht, welche Identifikationsmethode zu den *besten* Ergebnissen führt, fällt zunächst auf, dass in den Abbildungen 5.10 und 5.11 mit dem iterativen Algorithmus in allen Fällen die besten Ergebnisse erreicht werden. Dies entspricht der Erwartung, weil z. B. die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises mit dem Identifikationskriterium (5.23) relativ zielgenau optimiert wird. In Abbildung 5.12 ist das Ergebnis aber nicht ganz eindeutig, sondern die verschiedenen Kriterien sind ähnlich gut. Während also durch die worst-case Betrachtung ( $\nu$ -gap metric und iterative Identifikation bzw. Reglerauslegung) Ausreißer nach oben erfolgreich verhindert werden können, ist bei den genauen erreichten Zahlenwerten der Performance keine klare Tendenz erkennbar.

Ein Grund ist, dass die DMS-Modelle der beiden Prüfstände schon recht genau sind, was aus Abbildung 3.4 bekannt ist, sodass die Performance-Verschlechterung bei Anwendung des Reglers auf das System nur einen kleinen Beitrag zur Gesamtpformance ausmacht. Dies ist auch an den kleinen Zahlen in Abbildung 5.11 zu erkennen. Außerdem wird bei der Identifikation nicht genau die hier aufgetragene Performance minimiert, sondern nur eine damit in Zusammenhang stehende



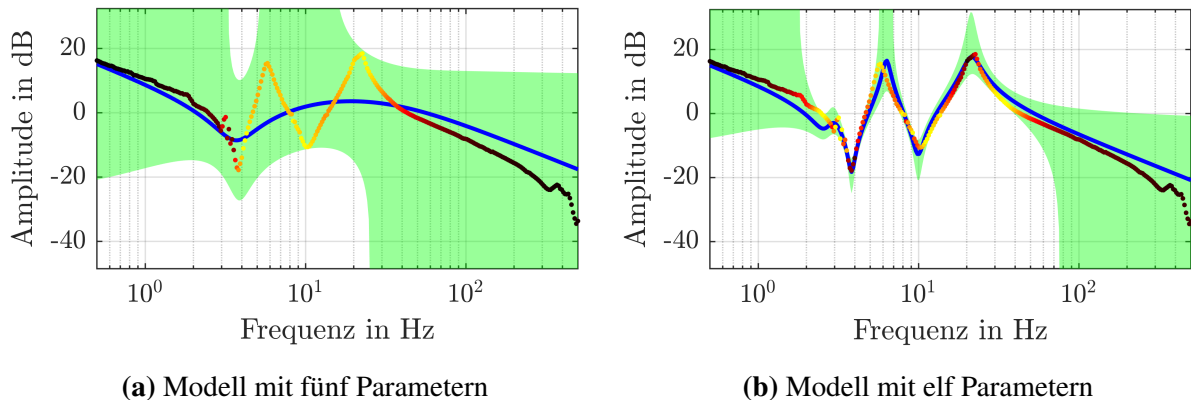


**Abbildung 5.12:** Performance am realen System  $\|W_{uy}T(P_0, C)V\|_\infty$  für die verschiedenen Identifikationskriterien

Größe. Bei der  $\nu$ -gap metric entsteht diese Ungenauigkeit dadurch, dass während der Identifikation noch kein Regler bekannt ist. Bei dem iterativen Verfahren aus Identifikation und Reglerauslegung wird nur eine obere Schranke für die Performance minimiert. Der tatsächliche Wert kann besser sein, wenn die Messung in der richtigen Richtung von dem Modell abweicht. Schließlich kommt eine gewisse Streuung in den Ergebnisse dadurch zustande, dass Trainings- und Validierungsdaten leicht voneinander abweichen. Überangepasstheit führt zu schlechteren Ergebnissen bei den komplexeren Modellen, weil für die Abbildungen 5.10 bis 5.12 Validierungsdaten verwendet wurden. Für die praktische Anwendung ist also eher die Sicherheit vor Ausreißern ein Vorteil als der genaue Zahlenwert. Wenn es möglich ist, das Ergebnis manuell zu prüfen, kann auch ein einfacheres Identifikationskriterium verwendet werden.

In einem ähnlichen Vergleich, jedoch ohne den Aspekt der Identifikation [TO23] wurden eindeutigere Ergebnisse zugunsten einer regelungstechnisch relevanten Kostenfunktion erreicht. Der Grund ist, dass die Autoren in dieser Quelle zum Vergleich die additive Unsicherheit sowie eine willkürlich normierte dual-Youla Unsicherheit verwendeten, welche beide keine theoretische Rechtfertigung haben und entsprechend auch zu schlechten Ergebnissen führten. Außerdem diente als Vergleichsgröße die erzielte worst-case Performance nach der Regleroptimierung, nicht die tatsächliche Performance am realen System. Ein experimenteller Vergleich mit der coprime factor Unsicherheit, d. h. der  $\nu$ -gap metric wurde nicht durchgeführt.

In [JGC05] wurde auf Basis von Versuchen gefolgert, dass Unsicherheitsmengen, die die tatsächliche Abweichung von Modell und Messung besonders genau beschreiben, zu einer besseren Reglerperformance führen als die coprime faktor Unsicherheit. Letztere sei zwar besonders einfach anzuwenden, aber wenig problemspezifisch. Für weiterführende Arbeiten wäre es daher interessant,



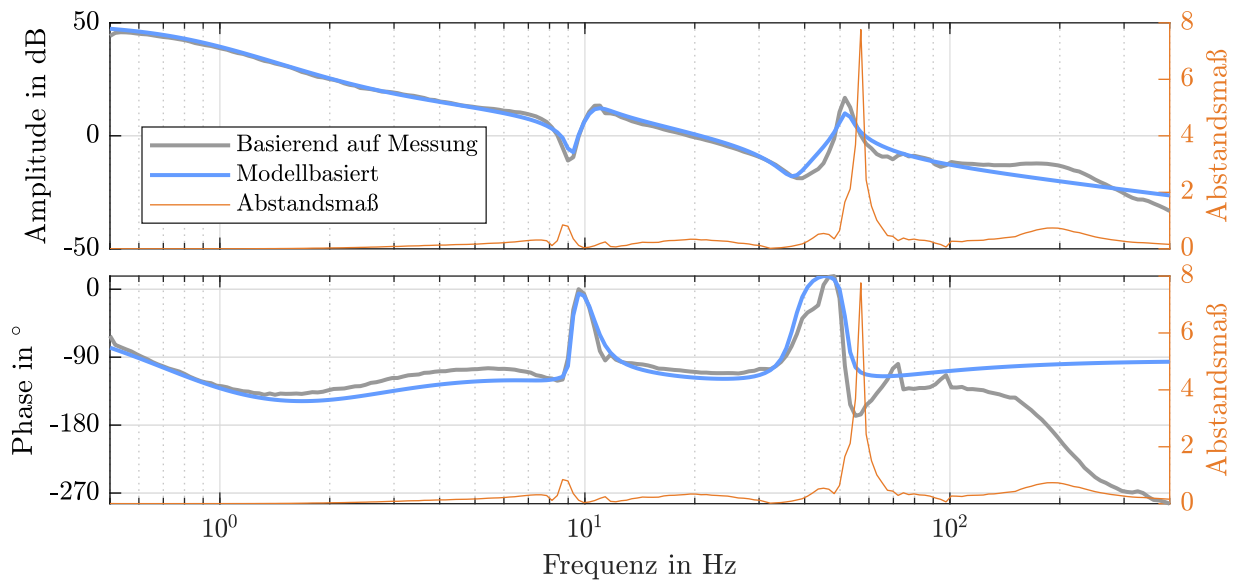
**Abbildung 5.13:** Bode-Diagramme für Modell (blau) und Messung (schwarz-rot-gold) bestimmt mit der  $\nu$ -gap metric als Kostenfunktion

den in dieser Arbeit durchgeführten Vergleich auf Unsicherheitsbeschreibungen auszuweiten, deren Form durch die tatsächlichen Fehler bestimmt ist und nicht durch die regelungstechnische Relevanz. Theoretisch wäre es möglich, Auswertungen wie Abbildung 5.10 zu erstellen und dann die Methode mit dem besten Wert abzulesen, o. ä. Der Ehrgeiz, den genauen Wert zu optimieren, ist allerdings fragwürdig, weil parasitäre Nichtlinearitäten, Rauschen und Änderungen des Frequenzgangs im Betrieb nicht berücksichtigt werden. Auch können sich durch die begrenzte Frequenzauflösung Ungenauigkeiten ergeben. Der erreichte Wert ist also in der Aussagekraft begrenzt.

#### 5.4.4 Rechenzeiten

Die Rechenzeiten zu den in diesem Abschnitt durchgeführten Experimenten sind in Tabelle 5.3 angegeben. Der angegebene Wert bezieht sich jeweils auf ein Modell. Aufgrund der Zufallseinflüsse bei der Identifikation ergeben sich in jeder Wiederholung leicht andere Werte. Die Zeiten der vier Durchläufe jeder Iteration sind in Tabelle 5.3 in Summe angegeben. Für die  $\nu$ -gap metric sind die Angaben für den Fall gemacht, dass die WZB bei jeder Auswertung der Kostenfunktion überprüft wird. Ohne diese Überprüfung ergeben sich die gleichen Parameter und ähnliche Laufzeiten, d. h. der zusätzliche Aufwand für die Berechnung der WZB wird durch die schnellere Konvergenz etwa kompensiert.

Insgesamt sind die Rechenzeiten pro Modell bei dem iterativen Verfahren grenzwertig lang, wenn die gesamte Modellselektion über Nacht laufen soll. In dem vorliegenden Beispiel mit vier Modellen würde die Rechenzeit insgesamt etwa 7,2 h dauern (Summe der unteren Zeile in Tabelle 5.3). Mehr als vier Modelle bieten sich häufig an. Es ist denkbar, dass sich die Identifikation noch beschleunigen ließe. Zum Beispiel könnten in jedem Identifikationsschritt die Ergebnisse der vorherigen Identifikation als Startwerte verwendet werden. Möglicherweise wäre dann ein gradientenbasiertes Verfahren ausreichend, welches typischerweise deutlich schneller ein Optimum findet.



**Abbildung 5.14:** Bode-Diagramm des Modells mit acht Parametern in Abbildung 5.12(b) bestimmt mit der Kostenfunktion aus logarithmischem Betrag und Phase sowie der Abstand  $\bar{\sigma}(W_{yy}(T(\hat{P}, C) - T(P_0, C))V)$  zwischen Modell und Messung

#### 5.4.5 Wahl der Modellordnung

Die Frage, ob eine hohe Modellkomplexität gerechtfertigt ist, ob also ein komplexeres Modell zu einem deutlich besseren Ergebnis führt, soll nun für die Versuche aus Abschnitt 5.4.3 untersucht werden. Bei Minimierung der  $\nu$ -gap metric ergeben sich die Residuen gemäß Tabelle 5.4. Es ist also eindeutig eine Verringerung mit zunehmender Modellkomplexität zu erkennen und auch die worst-case Performance verhält sich ähnlich, wie aus Tabelle 5.2 bekannt. Nach dem Kriterium der optimalen Stabilitätsreserve aus Abschnitt 5.3.3 sind die ersten zwei Modelle bei beiden Prüfständen zu ungenau, während die letzten zwei genau genug sind. Dies deckt sich mit der

**Tabelle 5.3:** Rechenzeiten für die Bestimmung der Modelle des RBG inklusive Reglerauslegung, aufaddiert über alle Iterationen, sofern relevant

	Anzahl der Modellparameter			
	2	5	8	11
Abstand in der komplexen Ebene	1,6 min	4,5 min	17 min	64 min
Log. Amplitude und Phase	2,4 min	4,6 min	17 min	69 min
$\nu$ -gap metric	1,6 min	6,2 min	21 min	62 min
Iterative Ident. & Reglerauslegung	5,4 min	33 min	132 min	260 min

intuitiven Erwartung, dass DMS-Modelle angemessen sind. Auch bei der iterativen Identifikation und Reglerauslegung zeigt die worst-case Performance die in Tabelle 5.2 angegebene klare Tendenz.

**Tabelle 5.4:** Residuen  $\delta_\nu(\hat{P}, P_0)$  bei der Identifikation in der  $\nu$ -gap metric, wie in Abschnitt 5.4.3 durchgeführt

	Anzahl der Modellparameter			
	2	5	8	11
RBG, $x$ -Achse	0,906	0,638	0,262	0,177
Einzelachse	0,749	0,571	0,330	0,323

Wird allerdings der tatsächlich erreichte Wert für die Auswahl herangezogen, so wie in den Abbildungen 5.10, 5.11 und 5.12, ist nicht immer eine Verbesserung bei größerer Modellordnung zu sehen. Am ehesten zeigt sich in Abbildung 5.10 bei dem iterativen Verfahren ein Vorteil der komplexeren Modelle, weil, wie bereits geschrieben, die Ähnlichkeit des geschlossenen Regelkreises recht genau dem Identifikationskriterium entspricht. Bei den anderen Abbildungen verliert sich dieser Unterschied und es ergeben sich manchmal auch für das einfachste Modell gute Ergebnisse. Teilweise liegt dies daran, dass durch die Berücksichtigung der Modellfehler bei der Identifikation eine gewisse Toleranz gegenüber diesen herbeigeführt wird, sodass auch große Fehler zu guten Ergebnissen führen. Außerdem sind ungenaue Modelle nicht zwangsläufig schlechter, weil die tatsächlichen Performance-Werte besser sein können als in Tabelle 5.2 angegeben. Es ist auch möglich, dass sich die Performance beim Übergang zum realen System verbessert und nicht verschlechtert, wenn die Messpunkte an geeigneten Stellen liegen. Schließlich hat die *nominelle* Performance einen dominanten Einfluss und sie muss sich nicht zwangsläufig mit zunehmender Modellkomplexität verbessern [vOvB10]. Dies erklärt zumindest die uneindeutigen Ergebnisse in Abbildung 5.12. Durch diese Ungenauigkeiten ist die Abhängigkeit von der Modellordnung insgesamt weniger deutlich als in Abschnitt 5.1.2, wo eine Kompensation der Systemeigenschaften angestrebt wurde und somit Abweichungen zwischen Modell und Messung direkt zu ungewollten Schwingungen in der Sprungantwort führten.

Eine Einschränkung der Verfahren ist, dass keine Abweichungen zwischen Messung und realem System berücksichtigt werden. Obwohl Unsicherheitsmengen verrechnet werden, werden Toleranzen in der Messung nicht berücksichtigt, wie sie durch Veränderungen über die Lebensdauer hinweg, durch parasitäre Nichtlinearitäten oder durch Messrauschen entstehen. Eine vermeintliche Maßnahme zur Steigerung der Robustheit wäre es, nur mit Modellen und Reglern geringer Komplexität zu arbeiten, um eine Überanpassung an die Eigenschaften der Messung zu verhindern. Die Vergleiche der Abbildungen 5.9 und 5.13(a) legen dies nahe, weil bei den einfacheren Modellen die Unsicherheitsmenge nicht genau den Resonanzen und Antiresonanzen folgt. Abweichungen in der Messung wären also in weiten Bereichen akzeptabel. Dies ist allerdings nicht empfehlenswert,

denn es könnte sich eine sehr inhomogene Robustheit ausbilden, die nicht durch die physikalischen Gegebenheiten begründbar ist. Zum Beispiel sind in Abbildung 5.9(b) an einigen Stellen Einschnürungen zu erkennen, die ebenfalls Probleme bei einer Verschiebung der Resonanzen o.ä. bedeuten könnten. Ein PI-Regler macht den geschlossenen Regelkreis also nicht zwangsläufig robuster als ein Regler höherer Ordnung.

Eine bessere Maßnahme zur Steigerung der Robustheit gegenüber Veränderungen / Schwankungen des Frequenzgangs wäre erwartungsgemäß, die Messung gezielt um künstliche Streu-Messpunkte zu ergänzen, wenn an einer Stelle Abweichungen zu erwarten sind, bevor die Identifikation mit Unsicherheitsmenge durchgeführt wird. Dies sollte weiter untersucht werden.

## 5.5 Fazit

In diesem Kapitel wurde die Möglichkeit einer regelungstechnisch relevanten Identifikation und Modellauswahl untersucht. Am Anfang des Kapitels wurde gezeigt, dass ein genaues Modell der Regelstrecke für die Reglerauslegung wichtig sein kann. Dieses Ergebnis ergab sich durch die Formulierung der Zielfunktion, welche eine Invertierung der Systemeigenschaften durch den Regler zur Folge hat.

Um nicht nur die Modellauswahl, sondern auch die Identifikation regelungstechnisch relevant und zusammengehörig zu gestalten, wurden Abstandsmaße aus der robusten Regelungstechnik untersucht. Diese erfordern die vorherige Definition eines Reglerauslegungsziels, das dann bei der Identifikation berücksichtigt wird. Hier wurde ein Ziel verwendet das nach der möglichst genauen Umsetzung eines gewünschten Frequenzgangs für den geschlossenen Regelkreis strebt (Abschnitt 5.2.1). Das erste betrachtete Identifikationskriterium erreicht regelungstechnische Relevanz durch eine worst-case Abschätzung über mögliche Regler, ohne bei der Identifikation einen bestimmten Regler zu berücksichtigen (Abschnitte 5.2.3 und 5.3.1). Es lässt sich daraus auch eine Aussage ableiten, wann ein Modell genau genug ist, die sich in Versuchen an den zwei Prüfständen als plausibel erwiesen hat. Das zweite betrachtete Kostenfunktional erfordert eine iterative Optimierung über Modell und Regler und ist dadurch zeitaufwändig, sowie theoretisch anspruchsvoll (Abschnitt 5.3.2). Diese Methode hat aber häufig die besten Ergebnisse hervorgebracht. In Bezug auf die Relevanz genauer Modelle haben sich bei den gewählten Einstellungen weniger eindeutige Ergebnisse ergeben als bei der Reglerauslegung nach dem Prinzip der Systeminvertierung. Insgesamt wurde aber auch hier der Vorteil eines komplexen Modells und somit eines komplexen Reglers deutlich.



## 6 Schlussfolgerung und Ausblick

Es folgt ein Fazit zur gesamten Arbeit (Abschnitt 6.1). Das Kapitel endet mit einem Ausblick in Abschnitt 6.2

### 6.1 Schlussfolgerung

Als Beitrag zur Lösung des Problems der zeitaufwendigen und schwierigen Modellierung wurden verschiedene Varianten der Struktur- und Parameteridentifikation untersucht. Sie basieren auf einem „Baukastensystem“, das es erlaubt, häufig verwendete Teilmodelle ein- und auszuschließen und so die Eignung verschiedener Gesamtmodelle systematisch zu testen. Als Domäne wurden elektrische Antriebsstränge mit ungenau bekannter Mechanik betrachtet, weil deren Modelle für die Reglerauslegung und Vorsteuerung der Elektromotoren wichtig sind.

Anhand von Beispielen wurde deutlich gemacht, dass bei vielen Anwendungen nicht nur das Ein-/Ausgangsverhalten eines Modells genau sein sollte, sondern auch die innere Struktur des physikalisch motivierten Modells wichtig ist. Es ist bekannt, dass die Parameter nahe an den wahren Werten liegen sollten, weil sonst die gute Extrapolationseigenschaft physikalisch motivierter Modelle verloren geht. Wegen dieser Überlegungen wurde als Auswahlkriterium die Identifizierbarkeit mit berücksichtigt und auch die Unterscheidbarkeit der Modelle untersucht.

Die Berücksichtigung der Identifizierbarkeit als Auswahlkriterium für Modelle ist selten. Ein möglicher Grund ist, dass in vielen anderen Anwendungen diese Vorgehensweise schwer umsetzbar wäre, weil nur wenige plausible Modelle für ein System in Frage kommen. In der hier betrachteten Anwendung ist es dagegen leicht möglich, mehrere potentielle Modelle zu definieren, die durchaus physikalisch sinnvoll sind. Unter diesen kann dann ein geeignetes ausgewählt werden, ohne dass eine Ordnungsreduktion angewendet werden müsste, welche die physikalische Interpretierbarkeit beeinträchtigt.

In Kapitel 3 wurden Versuche präsentiert, die zeigen, dass die Berücksichtigung der Identifizierbarkeit eine Methode zur Komplexitätsfestlegung darstellt, die plausible Ergebnisse liefert. Insgesamt entstehen dadurch eher Modelle, die interpretiert und teilweise plausibilisiert werden können, als wenn die Identifizierbarkeit nicht berücksichtigt würde.

Die verwendeten Methoden zur Untersuchung der Unterscheidbarkeit sind zwar vorwiegend aus der Literatur bekannt, wurden hier aber an mehreren Modellen systematisch verglichen. Eine Einschränkung dieser Methoden ist, dass sie nicht in jedem Fall eine Aussage liefern. Es wurde gezeigt,

dass die meisten Aussagen zustande kommen, wenn die verschiedenen Kriterien in Kombination verwendet werden, durchaus auch unter Berücksichtigung der weniger bekannten Kriterien.

Weil die Bestimmung der inneren Modellstruktur inklusive der Parameter häufig nicht möglich ist, wurde der Nutzen von temporärer Zusatzsensorik für die Inbetriebnahme untersucht. Der Neuheitsgrad besteht in der verwendeten Systematik zur Nutzung der Sensoren. Sie erlaubt es, vor Durchführung der Inbetriebnahme sinnvolle Sensorpositionen zu bestimmen und den erforderlichen Aufwand zu rechtfertigen. Es wurde mehrfach gezeigt, dass sich Identifizierbarkeit (Abschnitt 3.4) und Unterscheidbarkeit (Abschnitt 4.5.4) durch die Zusatzsensorik deutlich verbessern.

Zur Generierung von Modellen, welche für die Reglerauslegung optimal sind, wurden  $\mathcal{H}_\infty$ -Regler aus der robusten Regelungstechnik betrachtet. Mögliche Kostenfunktionen (und Methoden) für Parameteridentifikation und Modellauslegung lassen sich in diesem Fall aus dem Regelungsziel ableiten, sodass dieses schon vor der Identifikation feststehen muss. Die Ergebnisse sind so zusammen zu fassen, dass mit den „regelungstechnisch relevanten“ Kostenfunktionen besonders schlechte  $\mathcal{H}_\infty$ -Werte bei ungenauen Modellen verhindert werden können, dass sie aber nicht in jedem Fall ein besseres Ergebnis als die Summe der Fehlerquadrate liefern. Auch wurden Beispiele gezeigt (Abschnitt 5.4.3), in denen ein einfaches Modell ähnlich gute Reglerperformance hervorbringt wie ein komplexes Modell. Es ist also im Gegensatz zu Kapitel 3 nicht immer ein besonders komplexes Modell gerechtfertigt. Beiden Ansätzen ist gemein, dass sie eine Begrenzung der Modellordnung darstellen, die unabhängig von der Messgenauigkeit ist.

Zuletzt soll zusammengefasst werden, inwiefern sich die sieben in Abschnitt 1.1.3 beschriebenen Probleme der Modellauswahl bestätigt haben und durch welche Maßnahmen sie ggf. reduziert wurden:

1. Die Automatisierung eines komplexen und intransparenten Entscheidungsvorgangs ist eine Herausforderung. Allerdings ist davon auszugehen, dass eine manuelle Modellauswahl bei vielen Modellkandidaten auch an ihre Grenzen stoßen würde. Ein Experte könnte schnell den Überblick verlieren und würde intuitiv Schwellwerte festlegen. Insofern ist das Ersetzen einer natürlichen Person durch einen Algorithmus keine so große Veränderung wie es zunächst scheint.
2. Das Problem, dass die Parameteridentifikation bei nichtlinearen Modellen nicht in jedem Fall funktioniert, wurde nicht gezielt untersucht. Durch die wiederholte Ausführung der PSO mit hohen Zahlenwerten für Schwarmgröße und Iterationszahl ließ sich das Problem aber gut in den Griff bekommen und es bleibt lediglich das Problem der langen Rechenzeit.
3. Um die Gefahr der zufälligen Übereinstimmung von Messung und einem Modell zu reduzieren, wurden in allen Versuchen nur wenige potentielle Modelle berücksichtigt, wie in [SB94] empfohlen. Auch wurde der Einfluss von Rauschen zumindest in den Frequenzbereichs-Versuchen durch relativ lange Messungen und Mittelwertbildung reduziert. Bei wiederholten Versuchen unter gleichen Bedingungen hat sich gezeigt, dass der verbleibende Einfluss von Rauschen minimal ist.



4. Die Untersuchungen zur Unterscheidbarkeit und auch Ergebnisse wie Abbildung 3.5 haben gezeigt, dass tatsächlich die Unterschiede in der Kostenfunktion zwischen strukturell unterscheidbaren Modellen teilweise klein sind. Dieses Problem kann wohl nicht einfach gelöst werden, aber durch die Unterscheidbarkeitsuntersuchung ohne Dämpfung werden viele solche Fälle zumindest aufgezeigt. Dies ermöglicht es, gezielt Versuche mit Zusatzsensoren durchzuführen, oder bei der weiteren Verwendung der Modelle die „Beinah-Mehrdeutigkeiten“ zu berücksichtigen. Die Verbesserung der Unterscheidbarkeit durch Zusatzsensoren wurde umfangreich gezeigt.
5. In Bezug auf die Rechenzeiten war es fast immer möglich, die Parametrierung so zu wählen, dass ein paar Stunden ausreichen, sodass die Berechnungen über Nacht laufen könnten. Insgesamt stellt die Rechenzeit der stark parallelisierbaren Prozesse damit kein Hemmnis dar, zumal immer schnellere Computer mit vielen Rechenkernen entwickelt werden.
6. Das Problem, dass Modellauswahl und weitere Verwendung des Modells nicht zu trennen sind, wurde in Kapitel 5 anhand der Reglerauslegung als Anwendung untersucht. Es hat sich gezeigt, dass eine Verschachtelung tatsächlich in allen betrachteten Fällen unumgänglich ist. Es gibt aber akzeptable Kompromisslösungen, die ein realistisches Maß an Vorwissen erfordern. Die Berücksichtigung der Verwendung bei der Identifikation erfordert keine Benutzerinteraktion, sondern führt lediglich zu einer langen Rechenzeit.
7. Die Abhängigkeit von Hyperparametern wurde in Abschnitt 3.2.4 explizit untersucht und ist im Fall der praktischen Identifizierbarkeit unumgänglich. Eine Hyperparameteroptimierung wäre schwer möglich, weil es auf die Frage nach dem „richtigen“ Modell keine eindeutige Antwort gibt. Dies ist ein wichtiger Unterschied zu einem klassischen Klassifikationsproblem. Der Benutzer sollte akzeptieren, dass das Ergebnis der Methode von den vorgegebenen Schwellwerten abhängt und dass somit die Schwellwerte sinnvoll vorgegeben sein müssen. Durch die Normierung der Daten bei all diesen Kriterien sind die sinnvollen Schwellwerte zumindest nicht stark fallspezifisch.

## 6.2 Ausblick

Weitere Arbeiten sollten sich darauf konzentrieren, die automatische Wahl des resultierenden Modells zu validieren. D. h. es sollte in Experimenten weiter untersucht werden, ob das ausgegebene Modell zu den besten Eigenschaften in der geplanten Verwendung führt. Beispielsweise wäre es interessant zu sehen, wie stark sich eine Vorsteuerung durch Verwendung eines suboptimalen Modells verschlechtert.

Auch für den Fall, dass Modelle nicht unterscheidbar sind, sollten die Konsequenzen im Hinblick auf verschiedene Modellanwendungen weiter untersucht und erörtert werden. Wie schon geschrieben, gibt es hierzu deutlich weniger Arbeiten als zu fehlender Identifizierbarkeit und Beobachtbarkeit, sodass sich noch Potential für weiter Untersuchungen ergibt.

Als Verfeinerung der Modellauswahl können den Modellen auch Wahrscheinlichkeiten zugewiesen werden. Bei einer anschließenden Simulation werden dann die Ausgänge mehrerer Modelle entsprechend den Wahrscheinlichkeiten gewichtet gemittelt [RFD08; CD17]. Die Varianz dieser Prädiktion setzt sich aus der Parameterunsicherheit und der *Modellunsicherheit* zusammensetzt. Laut [Cha95; BRK01] trägt dabei die Modellunsicherheit häufig mehr bei als die Parameterunsicherheit, was bei einer einfachen Wahl des besten Modells vernachlässigt wird. In der vorliegenden Arbeit wurde dieser Ansatz nicht verfolgt, weil der Vorteil gegenüber einer rein datenbasierten Modellierung strittig ist.

Als weitere Verfeinerung wäre eine zeitabhängige Überblendung zwischen Modellen im Betrieb möglich [GVČ+17]. Dadurch ließe sich z. B. ein nichtlineares System mit einem arbeitspunktabhängigen, aber linearen Regler regeln.

Ein anderer Ansatz besteht darin, bei unzureichender Identifizierbarkeit die Anregung zu optimieren. Die Übertragung der Methoden auf mehrere Modelle, die sonst für ein Modell bekannt sind [PP13], müsste allerdings einen guten Kompromiss zwischen einerseits wenigen Versuchen und andererseits einer individuell optimalen Anregung darstellen. Eine mögliche Kombination aus Struktur- und Anregungsoptimierung schlägt der Autor in [Boh06] vor: Dabei bestimmt ein Algorithmus die Modellkomplexität aus dem Informationsgehalt der Messdaten und wenn die resultierende Genauigkeit für die Zielanwendung nicht ausreicht, wird die Anregung verbessert.

Im Hinblick auf die Identifizierbarkeit ließe sich die Güte der Modelle durch mehrere Teil-Identifikationen zu einzelnen Eigenschaften des Systems verbessern. Zum Beispiel bietet es sich bei den mechanischen Systemen an, zuerst die Reibung in einem statischen Experiment zu vermessen und dann in einem zweiten Versuch die Massen zu identifizieren. Es hat sich jedoch als äußerst herausfordernd dargestellt, eine universelle Abfolge zu finden, die bei unterschiedlich starken Ausprägungen der einzelnen Effekte immer sinnvoll ist. Zudem ließe sich die Identifizierbarkeit der Parameter nicht leicht über verschiedene Versuche hinweg vergleichen, weil bei den meisten Methoden der Sensitivitäts- und Kollinearitätsanalyse von einem gemeinsamen Experiment ausgegangen wird.

Zuletzt sei noch die Erweiterung auf komplexere Geometrien wie Roboter erwähnt. Dabei werden sich ähnliche Fragestellungen ergeben wie bei den hier betrachteten einfachen Geometrien. Die Ergebnisse werden trotz der größeren Parameterzahl nicht zwangsläufig schlechter sein, weil gleichzeitig auch weitere Aktoren und Sensoren zur Verfügung stehen. Bei Robotern wird die Abfrage von Vorwissen über die Geometrie noch wichtiger, denn sie enthalten neben Reibung, Elastizitäten und Lose auch besonders stark konfigurationsabhängige Eigenschaften, z. B. Gravitation, die sich über die Geometrie einfach berechnen lassen. Dieses Vorwissen sollte genutzt werden.

## A Beweis zu linearen Abhängigkeiten für die Unterscheidbarkeitsuntersuchung

In Bedingung 8 aus Abschnitt 4.4.1 werden die Untermatrizen einer Matrix  $\mathbf{J}$  mit  $\text{Rang}(\mathbf{J}) = N_R$  betrachtet, die sich durch Streichen von Zeilen ergeben. Für den vollen Rang einer gegebenen Untermatrix der Matrix  $\mathbf{J}$  mit  $N_R - 1$  Zeilen ist die Existenz mindestens einer Untermatrix mit Rang  $N_R$ , welche die gegebene Untermatrix vollständig enthält, notwendiges und hinreichendes Kriterium.

Diese Bedingung ist hinreichend, weil eine Matrix mit vollem Rang durch Streichen einer Zeile oder Spalte die Eigenschaft des vollen Rangs behält.

Notwendig ist diese Bedingung aufgrund des folgenden Satzes (angegeben für Spaltenvektoren):

Gegeben seien  $n$  Vektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$  mit  $\dim(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = N_R \leq n$ . Dabei ist  $\dim(\text{span}\{\cdot\})$  die Dimension der linearen Hülle, also der Rang der Matrix aus  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Weiterhin seien  $N_R - 1$  linear unabhängige Vektoren gegeben. O.B.d.A. seien dies  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}$ .

Satz: Es gibt einen Vektor  $\mathbf{a}_i, i = N_R, \dots, n$ , sodass

$$\dim(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}, \mathbf{a}_i\}) = N_R. \quad (\text{A.1})$$

Beweis: Angenommen, es gibt keinen solchen Vektor, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}\} &= \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}, \mathbf{a}_{N_R}\} \\ &= \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}, \mathbf{a}_{N_R}, \mathbf{a}_{N_R+1}\} = \dots \\ &= \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}, \mathbf{a}_{N_R}, \dots, \mathbf{a}_n\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\Rightarrow \dim(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}) = \dim(\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}\}) = N_R - 1. \quad (\text{A.3})$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass die Dimension der linearen Hülle über alle Vektoren  $N_R$  beträgt.

$\Rightarrow$  Es gibt einen Vektor  $\mathbf{a}_i$ , sodass

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}, \mathbf{a}_i\} \neq \text{span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_R-1}\}. \quad (\text{A.4})$$

□



## B Markov-Parameter-Ansatz zur Unterscheidbarkeitsanalyse von MIMO Systemen

Es ist bekannt, dass beim Markov-Parameter-Ansatz zur Unterscheidbarkeitsanalyse für zwei SISO Systeme eine endliche Anzahl Markov-Parameter analysiert werden muss, um die Informationen der ZRD vollständig zu nutzen. Bei Systemen mit mehreren Ausgängen stellt sich die Frage ob die Anzahl der auszuwertenden Gleichungen proportional mit der Anzahl der Ausgänge steigt, oder ob eine geringere Zahl genügt, um die vollständige Information zu nutzen. Ein möglicher Argumentationsweg nutzt das „generalisierte“ Cayley-Hamilton Theorem

$$\mathbf{A}_Z^q + \Lambda_q \mathbf{A}_Z^{q-1} + \dots + \Lambda_2 \mathbf{A}_Z + \Lambda_1 = \mathbf{0}, \quad (\text{B.1})$$

welches in [PLL98] im Kontext der modellprädiktiven Regelung vorgestellt wurde. Die skalaren Koeffizienten des Standard-Cayley-Hamilton Theorems wurden durch die  $N_Z \times N_Z$  Matrizen  $\Lambda_i = \mathbf{M}_i^w \mathbf{C}_Z$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$  ersetzt. Die Matrizen  $\mathbf{M}_i^w$  der Größe  $N_Z \times N_y$  lassen sich aus  $\mathbf{M}^w = [\mathbf{M}_1^w, \mathbf{M}_2^w, \dots, \mathbf{M}_q^w]$  mit der Bestimmungsgleichung  $\mathbf{A}_Z^q + \mathbf{M}^w \mathbf{O}_q = \mathbf{0}$  berechnen wenn

$$\mathbf{O}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z^0 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z^{q-1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

vollen Spaltenrang aufweist, siehe [PLL98]. Es handelt sich um eine Beobachtbarkeitsmatrix, in der  $q \in \mathbb{N} > 0$  ausreichend hoch gewählt werden muss, sodass voller Spaltenrang entsteht.

Durch linksseitige Multiplikation von (B.1) mit  $\mathbf{C}_Z$  sowie rechtsseitige Multiplikation mit  $\mathbf{B}_Z$  und Definition von  $\Gamma_i = \mathbf{C}_Z \mathbf{M}_i^w$  ergibt sich die Form

$$\mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z^q \mathbf{B}_Z + \Gamma_q \mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z^{q-1} \mathbf{B}_Z + \Gamma_2 \mathbf{C}_Z \mathbf{A}_Z \mathbf{B}_Z + \Gamma_1 \mathbf{C}_Z \mathbf{B}_Z = \mathbf{0}, \quad (\text{B.3})$$

in der die Markov-Parameter, vgl. (4.9), wiederzuerkennen sind.

Dieses Theorem kann für die Unterscheidbarkeitsanalyse verwendet werden, indem ein *erweitertes System* als die Ausgangsdifferenz der beiden zu vergleichenden Systeme definiert wird [MPCD15]:

$$\dot{\mathbf{x}}_a = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_a \mathbf{u} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{Z1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{Z2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{Z1} \\ \mathbf{B}_{Z2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{Z1} & -\mathbf{C}_{Z2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a = \mathbf{D}_{Z1} - \mathbf{D}_{Z2}.$$

Darin definieren  $\mathbf{A}_{Z1}$ ,  $\mathbf{B}_{Z1}$ ,  $\mathbf{C}_{Z1}$ ,  $\mathbf{D}_{Z1}$  bzw.  $\mathbf{A}_{Z2}$ ,  $\mathbf{B}_{Z2}$ ,  $\mathbf{C}_{Z2}$ ,  $\mathbf{D}_{Z2}$  die zwei Zustandsraum-Modelle mit  $N_{Z1}$  bzw.  $N_{Z2}$  Zuständen und gleich vielen Eingängen bzw. Ausgängen.

Die Suche nach ununterscheidbaren Modellen hat sich in eine Suche nach verschwindenden Markov-Parametern des erweiterten Systems verwandelt. Aus (B.3) folgt für das erweiterte System, dass alle Markov-Parameter höherer Ordnung 0 sind, wenn die ersten  $q - 1$  es sind, weil erstere als Linearkombinationen der letzteren geschrieben werden können. Das heißt, für die Unterscheidbarkeit genügt es zu prüfen, ob die ersten  $q - 1$  Markov-Parameter und der Durchgangsanteil des erweiterten Systems 0 sind.

Bezüglich der Größe von  $q$ : Werden nur die Zeilen und Spalten in  $\mathbf{O}_q$  gezählt, so kann die Größe  $q$  gering sein, solange  $qN_y \geq N_{Z1} + N_{Z2}$  erfüllt ist. Der tatsächliche Wert hängt aber von den Beobachtbarkeitseigenschaften des erweiterten Systems ab. Wenn also die verschiedenen Sensoren zu einer guten Beobachtbarkeit führen, kann die Anzahl der Markov-Parameter im Vergleich zu einem System mit nur einem Sensor reduziert werden, sodass ähnlich wie beim Übertragungsmatrix-Ansatz die Anzahl der Gleichungen ggf. unterproportional mit der Sensorzahl steigt.

Das Problem ist, dass die Bedingung des vollen Rangs von  $\mathbf{O}_q$  oft nicht für beliebige  $\theta_1$  gegeben ist, weil  $\theta_2$  so bestimmt werden kann, dass es einen Rangabfall gibt und umgekehrt. Die Tatsache, dass die hier betrachtete Matrix Parameter aus beiden Systemen enthält, führt dazu, dass einzelne Elemente der Matrix durch das Lösen von Gleichungssystemen gezielt zu null gemacht werden können. Ein Algorithmus zur Rangbestimmung ist in [AK01] gegeben. Wären nur Ausdrücke eines Systems enthalten, würden sich Nullen oft nur für spezielle Parametrierungen ergeben, welche bei der Untersuchung der strukturellen Unterscheidbarkeit definitionsgemäß ignoriert werden dürfen.

Anschaulich können die Parameter so gewählt werden, dass beide Systeme die gleiche Dynamik zeigen. Das erweiterte System ist dann nicht mehr beobachtbar, weil die Paralleldynamik die unabhängige Rekonstruktion der Zustände verhindert. Das Standard-Cayley-Hamilton Theorem stellt diese Anforderung an die Beobachtbarkeit nicht und kann daher immer angewendet werden. Es führt zu der Regel  $q \geq N_{Z1} + N_{Z2}$ , d. h. die Anzahl der Gleichungen steigt leider proportional mit dem Produkt  $N_u N_y$ .

## C Rechtfertigung der Vereinfachung in der Berechnung des strukturierten Singulärwertes

In Abschnitt 5.3.2 wird ausgenutzt, dass in dem speziellen Fall ( $W_u = W_i^{-1}$ ,  $W_y = W_o$ ,  $V_1 = W_i$ ,  $V_2 = W_o^{-1}$ , SISO-System) die Gleichheit  $\bar{\sigma}(N_{12}) = \bar{\sigma}(N_{21})$  für alle Kreisfrequenzen  $\omega$  gilt und sich somit der strukturierte Singulärwert zum größten Singulärwert vereinfacht. Aufgrund der verwendeten Normierung beim Aufstellen der dual-Youla Unsicherheit in (5.24) gilt:

$$N_{12} = \tilde{N}_e = \begin{pmatrix} \tilde{N}_{e,1} & \tilde{N}_{e,2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

mit der linksseitigen koprimen Faktorisierung  $\begin{pmatrix} CV_2 & V_1 \end{pmatrix} = \tilde{D}_e^{-1} \tilde{N}_e$  und der Normierung  $\tilde{N}_e \tilde{N}_e^* = \mathbf{I}$ . Dabei ist  $C$  der zur Definition der Unsicherheit verwendete Regler, auch genannt  $C_{k-1}$ . Die Partitionierung  $\begin{pmatrix} \tilde{N}_{e,2} & \tilde{N}_{e,1} \end{pmatrix}$  entspricht bezüglich der Dimensionen  $\begin{pmatrix} CV_2 & V_1 \end{pmatrix}$ . Außerdem ist

$$N_{21} = \begin{pmatrix} W_y D_c \\ -W_u N_c \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

mit  $C = N_c D_c^{-1}$  und der Normierung [OB12]

$$\begin{pmatrix} W_u N_c \\ W_y D_c \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} W_u N_c \\ W_y D_c \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (\text{C.3})$$

Solange der Regler nicht verändert wird, gilt  $\bar{\sigma}(N_{12}) = \bar{\sigma}(N_{21}) = 1 \forall \omega$ . Im Reglerauslegungsschritt ergibt sich aber ein neuer Regler  $C_2$ , sodass nun die Unsicherheitsmenge weiterhin in Abhängigkeit von  $C$  definiert ist, während die Performance für den Regler  $C_2$  bewertet werden soll. Für diese Bewertung ist es wichtig, ob immer noch die Gleichheit  $\bar{\sigma}(N'_{12}) = \bar{\sigma}(N'_{21}) \forall \omega$  gegeben ist. Eine erneute Berechnung von  $N$  liefert folgende Veränderung (ab jetzt SISO):

$$N'_{12} = \begin{pmatrix} a \tilde{N}_{e,2} & b \tilde{N}_{e,1} \end{pmatrix}, \quad N'_{21} = \begin{pmatrix} b W_y D_c \\ -a W_u N_c \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

mit

$$b = \frac{D_P + C N_P}{D_P + C_2 N_P}, \quad a = \frac{C_2}{C} b. \quad (\text{C.5})$$

Zur Berechnung von  $\bar{\sigma}(\mathbf{N}'_{12})$  wird zunächst das o. g. Verhältnis

$$\frac{\tilde{N}_{e,2}}{\tilde{N}_{e,1}} = \frac{V_2 C}{V_1} \Leftrightarrow \tilde{N}_{e,2} = \frac{V_2 C}{V_1} \tilde{N}_{e,1} \quad (\text{C.6})$$

in die Normierung  $\tilde{N}_e \tilde{N}_e^* = 1$  eingesetzt:

$$1 = |\tilde{N}_{e,1}|^2 + |\tilde{N}_{e,2}|^2 = |\tilde{N}_{e,1}|^2 + \left| \frac{V_2 C}{V_1} \tilde{N}_{e,1} \right|^2 \Leftrightarrow |\tilde{N}_{e,1}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{V_2 C}{V_1} \right|^2}}. \quad (\text{C.7})$$

Durch einsetzen in (C.6) und (C.4) ergibt sich

$$\bar{\sigma}(\mathbf{N}'_{12}) = \bar{\sigma} \left( \begin{pmatrix} a \frac{V_2 C}{V_1} & b \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{V_2 C}{V_1} \right|^2}}. \quad (\text{C.8})$$

Analog wird zur Berechnung von  $\bar{\sigma}(\mathbf{N}_{21})$  das Verhältnis

$$\frac{W_u N_c}{W_y D_c} = \frac{W_u C}{W_y} \Leftrightarrow W_u N_c = \frac{W_u C}{W_y} W_y D_c \quad (\text{C.9})$$

ausgenutzt. Dieses eingesetzt in die Normierung liefert

$$1 = |W_y D_c|^2 + |W_u N_c|^2 = |W_y D_c|^2 + \left| \frac{W_u C}{W_y} W_y D_c \right|^2 \Leftrightarrow |W_y D_c| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{W_u C}{W_y} \right|^2}} \quad (\text{C.10})$$

und schließlich eingesetzt in (C.9) und (C.4):

$$\bar{\sigma}(\mathbf{N}'_{21}) = \bar{\sigma} \left( \begin{pmatrix} b \\ -a \frac{W_u C}{W_y} \end{pmatrix} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{W_u C}{W_y} \right|^2}}. \quad (\text{C.11})$$

Mit der gewählten Einschränkung  $W_u = W_i^{-1}$ ,  $W_y = W_o$ ,  $V_1 = W_i$ ,  $V_2 = W_o^{-1}$  folgt also in diesem speziellen Fall die Gleichheit  $\bar{\sigma}(\mathbf{N}_{21}) = \bar{\sigma}(\mathbf{N}_{12})$  (der größte Singulärwert eines Vektors ist dessen 2-Norm).

□



## Literaturverzeichnis

Die folgende Publikationsliste unterscheidet zwischen fremden und eigenen Publikationen, während die Zitate im Text dies nicht kennzeichnen. Veröffentlichungen als Coautor sind nicht unter eigen aufgelistet.

### Eigene Publikationen

- [THPW21] TANTAU, M. ; HELMKE, C. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M.: Distinguishability study of 3-Mass Models for Electromechanical Motion Systems. In: *International Journal of Modelling, Identification and Control (IJMIC)* 36 (2021) Nr. 3, S. 175–187
- [TJZJa] TANTAU, M. ; JONSKY, T. ; ZIAUKAS, Z. ; JACOB, H.-G.: Control-relevant Model Selection for Multiple-Mass Systems. In: *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)* (14.–16. Juli 2022). Lissabon, Portugal: SCITEPRESS, S. 605–615
- [TJZJb] TANTAU, M. ; JONSKY, T. ; ZIAUKAS, Z. ; JACOB, H.-G.: Control-Relevant Model Selection for Servo Control Systems. In: *International Conference on Control, Decision and Information Technology (CoDIT)* (17.–20. Mai 2022). Istanbul, Türkei: IEEE
- [TPP+] TANTAU, M. ; POPP, E. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T.: Model Selection ensuring Practical Identifiability for Models of Electric Drives with Coupled Mechanics. In: *IFAC-PapersOnLine* (11.–17. Juli 2020). Bd. 53. 2. Berlin, Deutschland: Elsevier, S. 8853–8859
- [TPWa] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M.: Distinguishability Analysis for Multiple Mass Models of Servo Systems with Commissioning Sensors. In: *European Control Conference (ECC)* (29. Juni–2. Juli 2021). Rotterdam, Netherlands: IEEE, S. 2479–2486
- [TPWb] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M.: Nutzen von Zusatzsensorik für die Unterscheidbarkeit von Modellen für elektrische Antriebsstränge bei der Struktur- und Parameteridentifikation. In: *VDI-Mechatronik* (24.–25. März 2021). Darmstadt, S. 26–31

- [TPW21] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M.: Model Selection for Servo Control Systems. In: *International Journal of Mechatronics and Automation (IJMA)* 8 (2021) Nr. 3, S. 111–125
- [TPWOa] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T.: Backlash Identification in Industrial Positioning Systems Aided by a Mobile Accelerometer Board with Wi-Fi. In: *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)* (7.–9. Juli 2020), S. 576–584
- [TPWO b] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T.: Structure and Parameter Identification of Process Models with Hard Non-linearities for Industrial Drive Trains by Means of Degenerate Genetic Programming. In: *International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)* (29.–31. Juli 2019). Bd. 1, S. 368–376
- [TPWOc] TANTAU, M. ; PETERSEN, T. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T.: Constrained Design of Multisine Signals for Frequency-domain identification of Electric Drive Trains. In: *IFAC-PapersOnLine* (11.–17. Juli 2020). Bd. 53. 2. Berlin, Deutschland: Elsevier, S. 8750–8756
- [TPWO20] TANTAU, M. ; PERNER, L. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T.: Frequency Domain Model Selection for Servo Systems ensuring Practical Identifiability. In: *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)* (13.–16. Okt. 2020). IEEE. Beijing, China: IEEE, 2020, S. 735–741
- [TWOP] TANTAU, M. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T. ; PERNER, L.: Multisensor-Configuration for Improved Identifiability and Observability of Electromechanical Motion Systems. In: *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)* (13.–16. Okt. 2020), S. 742–749

## Fremde Publikationen

- [AAA10] AL-QAWASMI, K. E. ; AL-SMADI, A. M. ; AL-HAMAMI, A.: Artificial neural network-based algorithm for ARMA model order estimation. In: *International Conference on Networked Digital Technologies*. Springer. 2010, S. 184–192
- [ABH83] ANDRONIKOU, A. M. ; BEKEY, G. A. ; HADAEGH, F. Y.: Identifiability of nonlinear systems with hysteretic elements. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 144 (1983) Nr. 9, S. 209–214
- [ACC01] AGUILAR, J. ; CERRADA, M. ; CORDERO, A. T. F.: Genetic programming-based approach for system identification. In: *Advances in Fuzzy Systems and Evolutionary Computation, Artificial Intelligence* (2001), S. 329–334

- [Ada14] ADAMY, J.: *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 2. Aufl. Springer, 2014, S. 553–580
- [ADM20] ANSTETT-COLLIN, F. ; DENIS-VIDAL, L. ; MILLÉRIOUX, G.: A priori identifiability: An overview on definitions and approaches. In: *Annual Reviews in Control* 50 (2020), S. 139–149
- [AG21] ACILAN, E. ; GOL, M.: Identifiability Analysis for Power Plant Parameter Calibration in the Presence of Collinear Parameters. In: *IEEE Transactions on Power Systems* 37 (2021) Nr. 4, S. 1–11
- [AK00] AVDEENKO, T. V. ; KARGIN, S. A.: The problem of distinguishability of state space models. In: *International Conference on Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE)*. IEEE. 2000, S. 77–82
- [AK01] AVDEENKO, T. V. ; KARGIN, S. A.: A computer algebra method for testing structural distinguishability of state space models. In: *Korea-Russia International Symposium on Science and Technology (KORUS)*. Bd. 1. IEEE. 2001, S. 77–80
- [Alq22] ALQAWASMI, K. E.: Estimation of ARMA Model Order Utilizing Structural Similarity Index Algorithm. In: *International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*. Bd. 1. IEEE. 2022, S. 1087–1090
- [AM19] ASTRÖM, K. J. ; MURRAY, R. M.: *Feedback Systems - An Introduction for Scientists and Engineers*. 2. Aufl. Princeton University Press, 2019
- [AS17] AKINNIYI, A. J. ; SANNI, E. A.: The farrar-glaubar approach in testing for multicollinearity in economic data. In: *International Journal For Research In Business, Management And Accounting* 3 (2017) Nr. 5, S. 1–17
- [BÅ70] BELLMAN, R. ; ÅSTRÖM, K. J.: On structural identifiability. In: *Mathematical biosciences* 7 (1970) Nr. 3-4, S. 329–339
- [BA98] BURNHAM, K. P. ; ANDERSON, D. R.: *Model selection and inference - a practical use of the information-theoretic approach*. New York: Springer, 1998
- [Bec17] BECKMANN, D.: *Online-Parameteridentifikation elektrischer Antriebsstränge zur Nachführungsregelungstechnischer Parameter*. Diss. Hannover, Deutschland: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2017
- [Bel91] BELSLEY, D. A.: A guide to using the collinearity diagnostics. In: *Computer Science in Economics and Management* 4 (1991) Nr. 1, S. 33–50
- [Ben07] BEN-ZVI, A.: On the effect of un-identifiability on control. In: Bd. 40. 5. Elsevier, 2007, S. 245–250
- [BKDH18] BIZERAY, A. M. ; KIM, J.-H. ; DUNCAN, S. R. ; HOWEY, D. A.: Identifiability and parameter estimation of the single particle lithium-ion battery model. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 27 (2018) Nr. 5, S. 1862–1877

- [BLO20] BOEREN, F. ; LANZON, A. ; OOMEN, T.: Iterative identification and control using non-normalized coprime factors with application in wafer stage motion control. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 28 (2020) Nr. 2, S. 413–424
- [Boh00] BOHN: *Recursive parameter estimation for nonlinear continuous time systems through sensitivity model based adaptive filters*. Diss. Bochum, Deutschland: Ruhr-Universität Bochum, 2000
- [Boh06] BOHLIN, T. P.: *Practical grey-box process identification: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2006
- [Bon06] BONATE, P.: *Pharmacokinetic-Pharmacodynamic Modeling and Simulation*. Springer, 2006
- [Bos06] BOSCH, S.: *Lineare Algebra*. Bd. 4. Springer, 2006
- [BRK01] BRUN, R. ; REICHERT, P. ; KÜNSCH, H. R.: Practical identifiability analysis of large environmental simulation models. In: *Water Resources Research* 37 (2001) Nr. 4, S. 1015–1030
- [BSAD07] BELLU, G. ; SACCOMANI, M. P. ; AUDOLY, S. ; D'ANGIÒ, L.: DAISY: A new software tool to test global identifiability of biological and physiological systems. In: *Computer methods and programs in biomedicine* 88 (2007) Nr. 1, S. 52–61
- [BSDO15] BECKMANN, D. ; SCHAPPLER, M. ; DAGEN, M. ; ORTMAIER, T.: New approach using flatness-based control in high speed positioning: Experimental results. In: *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. Seville, Spanien: IEEE, 2015, S. 351–356
- [BV03] BÁEZ-RIVERA, Y. ; VÉLEZ-REYES, M.: Improved gray box modeling of electric drives using neural networks. In: *North American Power Symposium Proceedings (NAPS)*. 2003, S. 182–267
- [BW88] BATES, D. M. ; WATTS, D. G.: *Nonlinear regression analysis and its applications*. Wiley, 1988
- [CD17] CHEN, L. ; DING, Y.: Multiple model approach for nonlinear system identification with mixed-Gaussian weighting functions. In: *International Journal of Modelling, Identification and Control (IJMIC)* 28 (2017) Nr. 4, S. 295–306
- [CD80] COBELLI, C. ; DISTEFANO 3RD, J. J.: Parameter and structural identifiability concepts and ambiguities: a critical review and analysis. In: *American Journal of Physiology-Regulatory, Integrative and Comparative Physiology* 239 (1980) Nr. 1, R7–R24
- [CG89] CHAPMAN, M. J. ; GODFREY, K. R.: A methodology for compartmental model indistinguishability. In: *Mathematical biosciences* 96 (1989) Nr. 2, S. 141–164

- [CGV94] CHAPMAN, M. J. ; GODFREY, K. R. ; VAJDA, S.: Indistinguishability for a class of nonlinear compartmental models. In: *Mathematical biosciences* 119 (1994) Nr. 1, S. 77–95
- [Cha95] CHATFIELD, C.: Model uncertainty, data mining and statistical inference. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series A* 158 (1995) Nr. 3, S. 419–444
- [CHY02] CHEN, Y.-Y. ; HUANG, P.-Y. ; YEN, J.-Y.: Frequency-domain identification algorithms for servo systems with friction. In: *IEEE transactions on control systems technology* 10 (2002) Nr. 5, S. 654–665
- [Cod05] CODRONS, B.: *Process modelling for control: a unified framework using standard black-box techniques*. Springer Science & Business Media, 2005
- [CVK02] COELINGH, E. ; VRIES, T. J. de ; KOSTER, R.: Assessment of mechatronic system performance at an early design stage. In: *IEEE/ASME transactions on mechatronics* 7 (2002) Nr. 3, S. 269–279
- [DBG14] DOROBANTU, A. ; BALAS, G. J. ; GEORGIU, T. T.: Validating aircraft models in the gap metric. In: *Journal of Aircraft* 51 (2014) Nr. 6, S. 1665–1672
- [DDH05] DEBUS, T. J. ; DUPONT, P. E. ; HOWE, R. D.: Distinguishability and identifiability testing of contact state models. In: *Advanced Robotics* 19 (2005) Nr. 5, S. 545–566
- [DEB+13] DORMANN, C. F. ; ELITH, J. ; BACHER, S. ; BUCHMANN, C. ; CARL, G. ; CARRÉ, G. ; MARQUÉZ, J. R. G. ; GRUBER, B. ; LAFOURCADE, B. ; LEITÃO, P. J. u. a.: Collinearity: a review of methods to deal with it and a simulation study evaluating their performance. In: *Ecography* 36 (2013) Nr. 1, S. 27–46
- [DGA+17] DAVIDSON, N. R. ; GODFREY, K. R. ; ALQUADDOOMI, F. ; NOLA, D. ; DISTEFANO III, J. J.: DISTING: A web application for fast algorithmic computation of alternative indistinguishable linear compartmental models. In: *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 143 (2017), S. 129–135
- [DH16] DRESIG, H. ; HOLZWEISSIG, F.: *Maschinendynamik*. 12. Aufl. Springer, 2016, S. 71–180
- [Dra95] DRAPER, D.: Assessment and propagation of model uncertainty. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)* 57 (1995) Nr. 1, S. 45–70
- [DSNR92] DHAWAN, R. K. ; SAHAI, A. ; NISHAR, D. V. ; RAO, G. P.: Recursive estimation of Markov parameters in linear continuous-time SISO systems via block-pulse functions. In: *IFAC-PapersOnLine* 25 (1992) Nr. 15, S. 325–330
- [DV04] DATE, P. ; VINNICOMBE, G.: Algorithms for worst case identification in  $H_\infty$  and in the  $\nu$ -gap metric. In: *Automatica* 40 (2004) Nr. 6, S. 995–1002
- [DV05] DOUMA, S. G. ; VAN DEN HOF, P. M. J.: Relations between uncertainty structures in identification for robust control. In: *Automatica* 41 (2005) Nr. 3, S. 439–457

- [DV97] DE CALLAFON, R. A. ; VAN DEN HOF, P. M. J.: Suboptimal feedback control by a scheme of iterative identification and control design. In: *Mathematical modelling of systems 3* (1997) Nr. 1, S. 77–101
- [DV99] DATE, P. ; VINNICOMBE, G.: An algorithm for identification in the  $\nu$ -gap metric. In: *Conference on Decision and Control (CDC)*. Bd. 4. IEEE. 1999, S. 3230–3235
- [ECCG04] EVANS, N. D. ; CHAPPELL, M. J. ; CHAPMAN, M. J. ; GODFREY, K. R.: Structural indistinguishability between uncontrolled (autonomous) nonlinear analytic systems. In: *Automatica* 40 (2004) Nr. 11, S. 1947–1953
- [El-85] EL-SAKKARY, A.: The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 30 (1985) Nr. 3, S. 240–247
- [ES01] EBERHART, R. C. ; SHI, Y.: Particle Swarm Optimization: Developments, Applications and Resources. In: *IEEE Conference on Evolutionary Computation*. Seoul, Südkorea, Mai 2001, S. 81–86
- [Ewi00] EWINS, D. J.: *Modal testing: theory, practice, and application*. Research Studies Press Ltd., 2000
- [FBL06] FRANCO, G. ; BETTI, R. ; LONGMAN, R. W.: On the uniqueness of solutions for the identification of linear structural systems. In: *ASME Journal of Applied Mechanics* 73 (2006)
- [FF99] FERRERES, G. ; FROMION, V.: A new upper bound for the skewed structured singular value. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control: IFAC-Affiliated Journal* 9 (1999) Nr. 1, S. 33–49
- [FG67] FARRAR, D. E. ; GLAUBER, R. R.: Multicollinearity in regression analysis: the problem revisited. In: *The Review of Economic and Statistics* (1967), S. 92–107
- [FLMR93] FLIESS, M. ; LÉVINE, J. ; MARTIN, P. ; ROUCHON, P.: On differentially flat nonlinear systems. In: *Nonlinear Control Systems Design*. Elsevier, 1993, S. 159–163
- [Ful00] FULTON, W.: Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 37 (2000) Nr. 3, S. 209–249
- [GC89] GODFREY, K. R. ; CHAPMAN, M. J.: The problem of model indistinguishability in pharmacokinetics. In: *Journal of pharmacokinetics and biopharmaceutics* 17 (1989) Nr. 2, S. 229–267
- [GCD95] GALARZA, R. J. ; CHOW, J. H. ; DEGENEFF, R. C.: Transformer model reduction using time and frequency domain sensitivity techniques. In: *IEEE transactions on power delivery* 10 (1995) Nr. 2, S. 1052–1059
- [GCV94] GODFREY, K. R. ; CHAPMAN, M. J. ; VAJDA, S.: Identifiability and indistinguishability of nonlinear pharmacokinetic models. In: *Journal of pharmacokinetics and biopharmaceutics* 22 (1994) Nr. 3, S. 229–251

- [GCZL15] GENG, L.-H. ; CUI, S.-G. ; ZHAO, L. ; LIN, H.-Q.: A convex optimization algorithm for frequency-domain identification in the v-gap metric. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 29 (2015), S. 362–371
- [Gev04] GEVERS, M.: Identification for control: Achievements and open problems. In: *IFAC-PapersOnLine* 37 (2004) Nr. 9, S. 401–412
- [GLMS96] GRAY, G. J. ; LI, Y. ; MURRAY-SMITH, D. J. ; SHARMAN, K. C.: Structural system identification using genetic programming and a block diagram oriented simulation tool. In: *Electronics Letters* 32 (1996) Nr. 15, S. 1422–1424
- [GVB17] GÁBOR, A. ; VILLAVERDE, A. F. ; BANGA, J. R.: Parameter identifiability analysis and visualization in large-scale kinetic models of biosystems. In: *BMC systems biology* 11 (2017) Nr. 1, S. 54
- [GVČ+17] GÓMEZ-GUTIÉRREZ, D. ; VÁZQUEZ, C. R. ; ČELIKOVSKÝ, S. ; RAMÍREZ-TREVIÑO, A. ; CASTILLO-TOLEDO, B.: On the distinguishability and observer design for single-input single-output continuous-time switched affine systems under bounded disturbances with application to chaos-based modulation. In: *European Journal of Control* 34 (2017), S. 49–58
- [GWM+97] GRAY, G. J. ; WEINBRENNER, T. ; MURRAY-SMITH, D. J. ; LI, Y. ; SHARMAN, K. C.: Issues in nonlinear model structure identification using genetic programming. In: *Genetic Algorithms in Engineering Systems: Innovations and Applications*. Bd. 446. 1997, S. 308–313
- [Han05] HANSEN, B. E.: Challenges for econometric model selection. In: *Econometric Theory* 21 (2005) Nr. 1, S. 60–68
- [HAOR15] HEIMANN, B. ; ALBERT, A. ; ORTMAIER, T. ; RISSING, L.: *Mechatronik: Komponenten-Methoden-Beispiele*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG, 2015
- [HMC+08] HONG, X. ; MITCHELL, R. J. ; CHEN, S. ; HARRIS, C. J. ; LI, K. ; IRWIN, G. W.: Model selection approaches for non-linear system identification: a review. In: *International journal of systems science* 39 (2008) Nr. 10, S. 925–946
- [HOPY19] HONG, H. ; OVCHINNIKOV, A. ; POGUDIN, G. ; YAP, C.: SIAN: a tool for assessing structural identifiability of parametric ODEs. In: *ACM Communications in Computer Algebra* 53 (2019) Nr. 2, S. 37–40
- [HPC+11] HATTERSLEY, J. G. ; PÉREZ-VELÁZQUEZ, J. ; CHAPPELL, M. J. ; BEARUP, D. ; ROPER, D. ; DOWSON, C. ; BUGG, T. ; EVANS, N. D.: Indistinguishability and identifiability of kinetic models for the MurC reaction in peptidoglycan biosynthesis. In: *Computer methods and programs in biomedicine* 104 (2011) Nr. 2, S. 70–80
- [HPF99] HATAKEYAMA, S. ; PAN, Y. ; FURUTA, K.: Identification of continuous systems via markov parameters and time moments. In: *IFAC Proceedings Volumes* 32 (1999) Nr. 2, S. 3998–4003

- [HVB+21] HOYOS, J. D. ; VILLA-TAMAYO, M. F. ; BUILES-MONTAÑO, C. E. ; RAMIREZ-RINCÓN, A. ; GODOY, J. L. ; GARCIA-TIRADO, J. ; RIVADENEIRA, P. S.: Identifiability of control-oriented glucose-insulin linear models: review and analysis. In: *IEEE Access* 9 (2021), S. 69173–69188
- [ILZ+03] ISAKSSON, A. J. ; LINDKVIST, R. ; ZHANG, X. ; NORDIN, M. ; TALLFORS, M.: Identification of mechanical parameters in drive train systems. In: *IFAC Proceedings Volumes* 36 (2003) Nr. 16, S. 1501–1506
- [Ise08] ISERMANN, R.: *Mechatronische Systeme: Grundlagen*. 2. Aufl. Heidelberg: Springer-Verlag, 2008
- [Ise13] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme 2: Besondere Methoden, Anwendungen*. 2. Aufl. Springer-Verlag, 2013
- [Jan10] JANSCHKE, K.: *Systementwurf mechatronischer Systeme: Methoden–Modelle–Konzepte*. Springer-Verlag, 2010
- [Jan16] JANZÉN, D. L. I.: *Structural Identifiability and Indistinguishability in Mixed-Effects Models*. Diss. University of Warwick, 2016
- [JGC05] JUNG, M. ; GLOVER, K. ; CHRISTEN, U.: Comparison of uncertainty parameterisations for  $H_\infty$  robust control of turbocharged diesel engines. In: *Control Engineering Practice* 13 (2005) Nr. 1, S. 15–25
- [JQT11] JIA-FAN, Z. ; QING-HUA, Y. ; TONG, Z.: Numerical approach to identifiability test of parametric models in nonlinear mechanical systems. In: *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 133 (2011), S. 1–4
- [JSM18] JOUBERT, D. ; STIGTER, J. D. ; MOLENAAR, J.: Determining minimal output sets that ensure structural identifiability. In: *PloS one* 13 (2018) Nr. 11, S. 1–19
- [JWHT13] JAMES, G. ; WITTEN, D. ; HASTIE, T. ; TIBSHIRANI, R.: *An introduction to statistical learning*. Springer, 2013
- [KAJ12] KARLSSON, J. ; ANGUELOVA, M. ; JIRSTRAND, M.: An efficient method for structural identifiability analysis of large dynamic systems. In: *IFAC-PapersOnLine* 45 (2012) Nr. 16, S. 941–946
- [Kay93] KAY, S. M.: *Fundamentals of statistical signal processing*. Hrsg. von OPPENHEIM, A. V. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1993
- [KKA22] KALANTARI, S. H. ; KALHOR, A. ; ARAABI, B. N.: Order Determination of Linear Systems Using Convolutional Neural Networks. In: *International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*. Bd. 1. IEEE. 2022, S. 908–913



- [KM98] KUCZERA, G. ; MROCKOWSKI, M.: Assessment of hydrologic parameter uncertainty and the worth of multiresponse data. In: *Water Resources Research* 34 (1998) Nr. 6, S. 1481–1489
- [Kön04] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2*. 5. Aufl. Springer, 2004
- [Koz94] KOZA, J. R.: *Genetic programming II*. Bd. 17. MIT press Cambridge, MA, 1994
- [KPT05] KOVÁCS, P. ; PETRES, T. ; TÓTH, L.: A new measure of multicollinearity in linear regression models. In: *International Statistical Review* 73 (2005) Nr. 3, S. 405–412
- [LD16] LUKICHEV, D. V. ; DEMIDOVA, G. L.: Features of tuning strategy for field oriented control of PMSM position drive system with two-mass load. In: *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing* 10 (2016) Nr. 7, S. 88–94
- [LDM22] LAM, N. ; DOCHERTY, P. ; MURRAY, R.: Practical identifiability of parametrised models: A review of benefits and limitations of various approaches. In: *Mathematics and Computers in Simulation* 199 (2022), S. 202–216
- [Lev09] LEVINE, J.: *Analysis and control of nonlinear systems: A flatness-based approach*. Hrsg. von HILLERMEIER, C. ; HUBER, J. ; GILG, A. ; SCHÄFFLER, S. Berlin: Springer Science & Business Media, 2009
- [LFC+18] LIGON, T. S. ; FRÖHLICH, F. ; CHIŞ, O. T. ; BANGA, J. R. ; BALSACANTO, E. ; HASENAUER, J.: GenSSI 2.0: multi-experiment structural identifiability analysis of SBML models. In: *Bioinformatics* 34 (2018) Nr. 8, S. 1421–1423
- [LP09] LANZON, A. ; PAPAGEORGIOU, G.: Distance measures for uncertain linear systems: A general theory. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 54 (2009) Nr. 7, S. 1532–1547
- [LSBJ20] LAKHOVA, M. N. ; SALEM, J. B. ; BATTIKH, T. ; JABRI, I.: Review on modelling and design of mechatronic systems. In: *International Journal of Mechatronics and Automation (IJMA)* 7 (2020) Nr. 2, S. 57–63
- [Lun20] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1 - Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. 12. Aufl. Berlin: Springer Vieweg, 2020
- [Mah20] MAHTOUT, I.: *Youla-Kucera based multi-objective controllers: Application to autonomous vehicles*. Diss. Université Paris sciences et lettres, 2020
- [Mar70] MARQUARDT, D. W.: Generalized inverses, ridge regression, biased linear estimation, and nonlinear estimation. In: *Technometrics* 12 (1970) Nr. 3, S. 591–612
- [MAS04] MADAR, J. ; ABONYI, J. ; SZEIFERT, F.: Genetic programming for system identification. In: *Intelligent Systems Design and Applications Conference (ISDA)*. Budapest, Ungarn, 2004

- [MBC95] MARENBACH, P. ; BETTENHAUSEN, K. D. ; CUNO, B.: Selbstorganisierende Generierung strukturierter Prozeßmodelle. In: *at-Automatisierungstechnik* 43 (1995) Nr. 6, S. 277–288
- [MBF96] MARENBACH, P. ; BETTENHAUSEN, K. D. ; FREYER, S.: Signal path oriented approach for generation of dynamic process models. In: *annual conference on genetic programming*. MIT Press. 1996, S. 327–332
- [MBV21] MASSONIS, G. ; BANGA, J. R. ; VILLAVERDE, A. F.: AutoRepar: A method to obtain identifiable and observable reparameterizations of dynamic models with mechanistic insights. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* (2021)
- [MG92] MCFARLANE, D. ; GLOVER, K.: A loop-shaping design procedure using  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. In: *IEEE transactions on automatic control* 37 (1992) Nr. 6, S. 759–769
- [MKD14] MESHKAT, N. ; KUO, C. E.-z. ; DISTEFANO III, J.: On finding and using identifiable parameter combinations in nonlinear dynamic systems biology models and COMBOS: a novel web implementation. In: *PloS one* 9 (2014) Nr. 10, S. 1–14
- [MM12] MCLEAN, K. A. P. ; MCAULEY, K. B.: Mathematical modelling of chemical processes – obtaining the best model predictions and parameter estimates using identifiability and estimability procedures. In: *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 90 (2012) Nr. 2, S. 351–366
- [MM96] MÜLLER, K. ; MÜLLER, K.: *Entwurf robuster Regelungen*. Springer, 1996
- [Mor23] MORDOR INTELLIGENCE: *Industrial Motors Market Analysis*. <https://www.mordorintelligence.com/industry-reports/industrial-motors-market>. 2023
- [MPC+13] MOTCHON, K. M. D. ; PEKPE, K. M. ; CASSAR, J.-P. ; DE BIÈVRE, S. ; COCQUEMPOT, V.: Operating modes distinguishability condition in switching systems. In: *Conference on Decision and Control (CDC)*. IEEE. 2013, S. 79–84
- [MPC17] MOTCHON, K. M. D. ; PEKPE, K. M. ; CASSAR, J.-P.: Conditions for strict distinguishability of single-output nonlinear control-affine systems. In: *Systems & Control Letters* 105 (2017), S. 20–26
- [MPCD15] MOTCHON, K. M. D. ; PEKPE, K. M. ; CASSAR, J.-P. ; DE BIÈVRE, S.: On the input-output distinguishability of single output continuous linear time-invariant systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 61 (2015) Nr. 7, S. 1906–1911
- [MPD+18] MUÑOZ-TAMAYO, R. ; PUILLET, L. ; DANIEL, J.-B. ; SAUVANT, D. ; MARTIN, O. ; TAGHIPOOR, M. ; BLAVY, P.: To be or not to be an identifiable model. Is this a relevant question in animal science modelling?. In: *Animal* 12 (2018) Nr. 4, S. 701–712

- [MPRL07] MITTELMANN, H. D. ; PENDSE, G. ; RIVERA, D. E. ; LEE, H.: Optimization-based design of plant-friendly multisine signals using geometric discrepancy criteria. In: *Comput. Optim. and Appl.* 38 (2007) Nr. 1, S. 173–190
- [MRS18] MESHKAT, N. ; ROSEN, Z. ; SULLIVANT, S.: Algebraic tools for the analysis of state space models. In: *The 50th anniversary of Gröbner bases*. Mathematical Society of Japan. 2018, S. 171–205
- [MW72] MÜLLER, P. C. ; WEBER, H. I.: Analysis and optimization of certain qualities of controllability and observability for linear dynamical systems. In: *Automatica* 8 (1972) Nr. 3, S. 237–246
- [MXPW11] MIAO, H. ; XIA, X. ; PERELSON, A. S. ; WU, H.: On identifiability of nonlinear ODE models and applications in viral dynamics. In: *SIAM review* 53 (2011) Nr. 1, S. 3–39
- [Nel01] NELLES, O.: *Nonlinear system identification*. Berlin: Springer-Verlag, 2001
- [Nev16] NEVARANTA, N.: *Online Time and Frequency Domain Identification of a Resonating Mechanical System in Electric Drives*. Diss. Lappeenranta: Lappeenranta University of Technology, 2016
- [NGG97] NORDIN, M. ; GALIC', J. ; GUTMAN, P.-O.: New models for backlash and gear play. In: *International journal of adaptive control and signal processing* 11 (1997) Nr. 1, S. 49–63
- [Now16] NOWOISKY, S.: *Verfahren zur Identifikation nichtlinearer dynamischer Getriebemodelle*. Technische Universität Berlin, 2016
- [NW88] NALECZ, A. G. ; WICHER, J.: Design sensitivity analysis of mechanical systems in frequency domain. In: *Journal of sound and vibration* 120 (1988) Nr. 3, S. 517–526
- [NWLK15] NIENAŁTOWSKI, K. ; WŁODARCZYK, M. ; LIPNIACKI, T. ; KOMOROWSKI, M.: Clustering reveals limits of parameter identifiability in multi-parameter models of biochemical dynamics. In: *BMC systems biology* 9 (2015) Nr. 1, S. 65
- [OB08] OOMEN, T. ; BOSGRA, O.: Robust-control-relevant coprime factor identification: A numerically reliable frequency domain approach. In: *American Control Conference*. IEEE. 2008, S. 625–631
- [OB12] OOMEN, T. ; BOSGRA, O.: System identification for achieving robust performance. In: *Automatica* 48 (2012) Nr. 9, S. 1975–1987
- [Obr09] OBRZUT, T. M.: *Non-Collocation Problems in Dynamics and Control of Mechanical Systems*. Diss. Cleveland State University, 2009
- [Ott08] OTT, C.: *Cartesian impedance control of redundant and flexible-joint robots*. Springer, 2008

- [OvB09] OOMEN, T. ; VAN HERPEN, R. ; BOSGRA, O.: Robust-control-relevant coprime factor identification with application to model validation of a wafer stage. In: *IFAC-PapersOnLine* 42 (2009) Nr. 10, S. 1044–1049
- [OvQ+13] OOMEN, T. ; VAN HERPEN, R. ; QUIST, S. ; VAN DE WAL, M. ; BOSGRA, O. ; STEINBUCH, M.: Connecting system identification and robust control for next-generation motion control of a wafer stage. In: *Transactions on Control Systems Technology* 22 (2013) Nr. 1, S. 102–118
- [Pap04] PAPADIMITRIOU, C.: Optimal sensor placement methodology for parametric identification of structural systems. In: *Journal of sound and vibration* 278 (2004) Nr. 4-5, S. 923–947
- [PLL98] PHAN, M. Q. ; LIM, R. K. ; LONGMAN, R. W.: Unifying input-output and state-space perspectives of predictive control. In: *Department of mechanical and aerospace engineering technical report* (1998) Nr. 3044
- [Poh78] POHJANPALO, H.: System identifiability based on the power series expansion of the solution. In: *Mathematical biosciences* 41 (1978) Nr. 1-2, S. 21–33
- [PP13] PRONZATO, L. ; PÁZMAN, A.: Design of experiments in nonlinear models. In: *Lecture notes in statistics* 212 (2013)
- [PPS+15] PAKROOH, P. ; PEZESHKI, A. ; SCHARF, L. L. ; COCHRAN, D. ; HOWARD, S. D.: Analysis of Fisher information and the Cramér-Rao bound for nonlinear parameter estimation after compressed sensing. In: *Transactions on Signal Processing*. IEEE. 2015, S. 6423–6428
- [Pre23] PRECEDENCE RESEARCH: *Servo motors and drives market*. <https://www.precedence-research.com/servo-motors-and-drives-market>. 2023
- [PS12] PINTELON, R. ; SCHOUKENS, J.: *System identification: a frequency domain approach*. John Wiley & Sons, 2012
- [PTVF07] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical recipes: The art of scientific computing*. 3. Aufl. Cambridge university press, 2007
- [PTW+] POPP, E. ; TANTAU, M. ; WIELITZKA, M. ; ORTMAIER, T. ; GIEBERT, D.: Frequency Domain Identification and Identifiability Analysis of a Nonlinear Vehicle Drivetrain Model. In: *European Control Conference (ECC)* (25.–28. Juni 2019). IEEE, S. 237–242
- [RFD08] ROJAS, R. ; FEYEN, L. ; DASSARGUES, A.: Conceptual model uncertainty in ground-water modeling: Combining generalized likelihood uncertainty estimation and Bayesian model averaging. In: *Water Resources Research* 44 (2008) Nr. 12

- [RKM+09] RAUE, A. ; KREUTZ, C. ; MAIWALD, T. ; BACHMANN, J. ; SCHILLING, M. ; KLINGMÜLLER, U. ; TIMMER, J.: Structural and practical identifiability analysis of partially observed dynamical models by exploiting the profile likelihood. In: *Bioinformatics* 25 (2009) Nr. 15, S. 1923–1929
- [RLWV85] RAKSANYI, A. ; LECOURTIER, Y. ; WALTER, E. ; VENOT, A.: Identifiability and distinguishability testing via computer algebra. In: *Mathematical biosciences* 77 (1985) Nr. 1-2, S. 245–266
- [RS] ROSA, P. ; SILVESTRE, C.: On the distinguishability of discrete linear time-invariant dynamic systems. In: *Conference on Decision and Control and European Control Conference* (12.–15. Dez. 2011). IEEE. Orlando, FL, USA, S. 3356–3361
- [SB94] STIGTER, J. D. ; BECK, M. B.: A new approach to the identification of model structure. In: *Environmetrics* 5 (1994) Nr. 3, S. 315–333
- [SBG+97] SCHÜTTE, F. ; BEINEKE, S. ; GROSTOLLEN, H. ; FRÖHLEKE, N. ; WITKOWSKI, U. ; RÜCKERT, U. ; RÜPING, S.: Structure-and parameter identification for a two-mass-system with backlash and friction using a self-organizing map. In: *European Conference on Power Electronics and Applications*. Bd. 3. 1997, S. 3–358
- [SBWT96] SOUTH, M. ; BANCROFT, C. ; WILLIS, M. J. ; THAM, M. T.: System identification via genetic programming. In: *UKACC International Conference on Control* (1996), S. 912–917
- [Sch03] SCHÜTTE, F.: *Automatisierte Reglerinbetriebnahme für elektrische Antriebe mit schwingungsfähiger Mechanik*. Shaker, 2003
- [SD91] STEIN, G. ; DOYLE, J. C.: Beyond singular values and loop shapes. In: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 14 (1991) Nr. 1, S. 5–16
- [SD92] SIENICKI, K. ; DUROCHER, G.: On the identifiability and distinguishability of first-order reaction systems by time-resolved fluorescence spectroscopy. In: *Journal of Photochemistry and Photobiology A: Chemistry* 63 (1992) Nr. 3, S. 279–287
- [SJ21] STIGTER, J. D. ; JOUBERT, D.: Computing measures of identifiability, observability, and controllability for a dynamic system model with the StrucID App. In: *IFAC-PapersOnLine* 54 (2021) Nr. 7, S. 138–143
- [SM15] STIGTER, J. D. ; MOLENAAR, J.: A fast algorithm to assess local structural identifiability. In: *Automatica* 58 (2015), S. 118–124
- [SP05] SKOGESTAD, S. ; POSTLETHWAITE, I.: *Multivariable feedback control - analysis and design*. Zweite Auflage. John Wiley & Sons, Ltd, 2005
- [SP09] SANTOS COELHO, L. dos ; PESSÔA, M. W.: Nonlinear model identification of an experimental ball-and-tube system using a genetic programming approach. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 23 (2009) Nr. 5, S. 1434–1446

- [SR12] SYSEL, P. ; RAJMIC, P.: Goertzel algorithm generalized to non-integer multiples of fundamental frequency. In: *Journal on Advances in Signal Processing (EURASIP) 2012* (2012) Nr. 56, S. 1–8
- [SS89] SÖDERSTRÖM, T. ; STOICA, P.: *System identification*. New York: Prentice-Hall, Inc., 1989
- [Ste87] STEWART, G. W.: Collinearity and least squares regression. In: *Statistical Science* 2 (1987) Nr. 1, S. 68–84
- [TdO21] TACX, P. ; DE ROZARIO, R. ; OOMEN, T.: Model order selection in robust-control-relevant system identification. In: *19th IFAC Symposium on System Identification*. Bd. 54. 7. Elsevier, 2021, S. 1–6
- [TGJ] TKANY, C. ; GROTHJAHN, M. ; JONSKY, T.: Reducing Extended Kalman Filter Sampling Rates for Multi-Rate Fusion through Computationally Efficient Sequential Single Sensor Measurement Processing. In: *International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)* (17.–20. Mai 2022). Bd. 1. IEEE, S. 1387–1392
- [TGK20] TKANY, C. ; GROTHJAHN, M. ; KÜHN, J.: Flatness-Based Feedforward Control of a Stacker Crane with Online Trajectory Generation. In: *International Conference on Automation, Control and Robots (ICACR)*. IEEE. 2020, S. 79–87
- [Tho13] THOMSEN, S.: *Drehzahlregelungsverfahren für Antriebssysteme mit schwingungsfähiger Last unter Berücksichtigung verschiedener mechanischer Antriebsparameter-Auslegung, Analyse und Vergleich*. Diss. Kiel: Christian-Albrechts-Universität, 2013
- [TO23] TACX, P. ; OOMEN, T.: Comparing multivariable uncertain model structures for data-driven robust control: Visualization and application to a continuously variable transmission. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 33 (2023) Nr. 16, S. 9636–9664
- [TS18] THOMASETH, K. ; SACCOMANI, M. P.: Local identifiability analysis of nonlinear ODE models: how to determine all candidate solutions. In: *IFAC-PapersOnLine* 51 (2018) Nr. 2, S. 529–534
- [Vaj81] VAJDA, S.: Structural equivalence of linear systems and compartmental models. In: *Mathematical Biosciences* 55 (1981) Nr. 1-2, S. 39–64
- [Vaj84] VAJDA, S.: Structural equivalence and exhaustive compartmental modeling. In: *Mathematical biosciences* 69 (1984) Nr. 1, S. 57–75
- [Van97] VAN DEN HOF, P.: Closed-loop issues in system identification. In: *IFAC-PapersOnLine* 30 (1997) Nr. 11, S. 1547–1560
- [VDV+09] VAN DOREN, J. F. M. ; DOUMA, S. G. ; VAN DEN HOF, P. M. J. ; JANSEN, J. D. ; BOSGRA, O. H.: Identifiability: from qualitative analysis to model structure approximation. In: *IFAC Proceedings Volumes* 42 (2009) Nr. 10, S. 664–669

- [Vil07] VILLWOCK, S.: *Identifikationsmethoden für die automatisierte Inbetriebnahme und Zustandsüberwachung elektrischer Antriebe*. Diss. Universität Siegen, 2007
- [Vin01] VINNICOMBE, G.: *Uncertainty and Feedback –  $H_\infty$  loop-shaping and the  $\nu$ -gap metric*. London: Imperial College Press, 2001
- [Vin93] VINNICOMBE, G.: Frequency domain uncertainty and the graph topology. In: *Transactions on Automatic Control* 38 (1993) Nr. 9, S. 1371–1383
- [VKT+] VOLKMANN, B. ; KACZOR, D. ; TANTAU, M. ; SCHAPPLER, M. ; ORTMAIER, T.: Sensitivity-based Model Reduction for In-Process Identification of Industrial Robots Inverse Dynamics. In: *International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA)* (13.–16. Okt. 2020). IEEE, S. 912–919
- [VM88] VENZON, D. J. ; MOOLGAVKAR, S. H.: A method for computing profile-likelihood-based confidence intervals. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)* 37 (1988) Nr. 1, S. 87–94
- [VMRK96] VOLINSKY, C. T. ; MADIGAN, D. ; RAFTERY, A. E. ; KRONMAL, R. A.: Bayesian model averaging in proportional hazard models: Assessing stroke risk. In: *Department of Statistics, University of Washington, Tech. Rep 302* (1996)
- [Vöt07] VÖTH, S.: *Dynamik schwingungsfähiger Systeme: Von der Modellbildung bis zur Betriebsfestigkeitsrechnung mit MATLAB/SIMULINK®*. Springer-Verlag, 2007
- [vOvB10] VAN HERPEN, R. ; OOMEN, T. ; VAN DE WAL, M. ; BOSGRA, O.: Experimental evaluation of robust-control-relevance: A confrontation with a next-generation wafer stage. In: *Proceedings of the American Control Conference*. IEEE. 2010, S. 3493–3499
- [VR88] VAJDA, S. ; RABITZ, H.: Identifiability and distinguishability of first-order reaction systems. In: *The Journal of Physical Chemistry* 92 (1988) Nr. 3, S. 701–707
- [VR94] VAJDA, S. ; RABITZ, H.: Identifiability and distinguishability of general reaction systems. In: *The Journal of Physical Chemistry* 98 (1994) Nr. 20, S. 5265–5271
- [VS94] VAN DEN HOF, P. M. J. ; SCHRAMA, R. J. P.: Identification and control-closed loop issues. In: *IFAC-PapersOnLine* 27 (1994) Nr. 8, S. 311–323
- [Vu15] VU, Q. D.: *Parameter Estimation in Complex Nonlinear Dynamical Systems*. PhD-Thesis. Technische Universität Ilmenau, 2015
- [Wan91] WANG, Q.-G.: Identifiability of Lagrangian systems with application to robot manipulators. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* (1991), S. 289–294
- [WAW04] WINKLER, S. ; AFFENZELLER, M. ; WAGNER, S.: *Identifying nonlinear model structures using genetic programming techniques*. Citeseer, 2004

- [WBF+99] WERTZ, H. ; BEINEKE, S. ; FROHLEKE, N. ; BOLOGNANI, S. ; UNTERKOFER, K. ; ZIGLIOTTO, M. ; ZORDAN, M.: Computer aided commissioning of speed and position control for electrical drives with identification of mechanical load. In: *Conference Record of the IEEE Industry Applications Conference*. Bd. 4. IEEE. 1999, S. 2372–2379
- [WHR+21] WIELAND, F.-G. ; HAUBER, A. L. ; ROSENBLATT, M. ; TÖNSING, C. ; TIMMER, J.: On structural and practical identifiability. In: *Current Opinion in Systems Biology* 25 (2021), S. 60–69
- [Wic82] WICHER, J.: On a certain method for parameter estimation of a mechanical system with sensitivity model application. In: *Engineering Transactions* 30 (1982) Nr. 1, S. 67–75
- [WLH84] WALTER, E. ; LECOURTIER, Y. ; HAPPEL, J.: On the structural output distinguishability of parametric models, and its relations with structural identifiability. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 29 (1984) Nr. 1, S. 56–57
- [WP96] WALTER, E. ; PRONZATO, L.: On the identifiability and distinguishability of nonlinear parametric models. In: *Mathematics and computers in simulation* 42 (1996) Nr. 2-3, S. 125–134
- [WvSB05] WASSINK, M. G. ; VAN DE WAL, M. ; SCHERER, C. ; BOSGRA, O.: LPV control for a wafer stage: beyond the theoretical solution. In: *Control Engineering Practice* 13 (2005) Nr. 2, S. 231–245
- [YJWC09] YATES, J. W. T. ; JONES, R. D. O. ; WALKER, M. ; CHEUNG, S. Y. A.: Structural identifiability and indistinguishability of compartmental models. In: *Expert opinion on drug metabolism & toxicology* 5 (2009) Nr. 3, S. 295–302
- [ZCK91] ZHANG, L.-Q. ; COLLINS, J. C. ; KING, P. H.: Indistinguishability and identifiability analysis of linear compartmental models. In: *Mathematical biosciences* 103 (1991) Nr. 1, S. 77–95
- [ZD98] ZHOU, K. ; DOYLE, J. C.: *Essentials of robust control*. Bd. 104. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1998
- [ZDG96] ZHOU, K. ; DOYLE, J. C. ; GLOVER, K.: *Robust and optimal control*. Hrsg. von ROBBINS, T. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1996
- [Zem12] ZEMKE, S.: *Analyse und modellbasierte Regelung von Ruckelschwingungen im Antriebsstrang von Kraftfahrzeugen*. Diss. Leibniz Universität Hannover, 2012
- [ZF00a] ZHANG, G. ; FURUSHO, J.: Analysis of three-inertia system via a simplified model. In: *International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC)*. Bd. 3. IEEE. 2000, S. 1459–1464



- 
- [ZF00b] ZHANG, G. ; FURUSHO, J.: Speed control of two-inertia system by PI/PID control.  
In: *IEEE Transactions on industrial electronics* 47 (2000) Nr. 3, S. 603–609
- [Zir08] ZIRN, O.: *Machine tool analysis: modelling, simulation and control of machine tool manipulators*. Habilitation thesis. ETH Zürich, 2008



## Lebenslauf

### zu meiner Person

Name, Vorname Tantau, Mathias  
 geboren am 15.12.1989 in Langenhagen  
 Familienstand verheiratet  
 Staatsangehörigkeit deutsch

### beruflicher Werdegang

Seit Okt/22 Baker Hughes, Celle  
 Jul/17 - Aug/22 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechatronische Systeme,  
 LUH

### Studium

Okt/15 - Jun/17 Mechatronikstudium (Master)  
 Abschluss am 12. Juni 2017 (1,0)  
 Okt/14 - Sep/15 Master of Science by Research an der Universität Cranfield University  
 (Cranfield, Vereinigtes Königreich)  
 Abschluss am 29. Januar 2016 (unbenotet)  
 Okt/10 - Sep/14 Mechatronikstudium (Bachelor) an der LUH,  
 Abschluss am 08. Oktober 2014 (1,2)

### Schulbildung

Sep/02 - Jun/09 Gymnasium Goetheschule, Herrenhausen  
 Abschluss am 18. Juni 2009: Abitur (1,1)

### Auszeichnungen

Apr/18 Dr. Jürgen und Irmgard Ulderup Preis 2018  
 Feb/18 Preis des Präsidiums der Universität Hannover  
 Okt/14 - Jan/16 Gewährung des Dr. Jürgen Ulderup Maschinenbau Stipendiums  
 Mär/13 Aufnahme in die Studienstiftung des deutschen Volkes  
 Feb/13 Preis des Präsidiums der Universität Hannover  
 Okt/12 - Sep/13 Förderung durch das Deutschlandstipendium  
 Okt/11 - Sep/12 Förderung durch das Deutschlandstipendium